Série A, N° 3700
N° d'ordre 4551

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Elie ABSI

1ère THÈSE :

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES DE HAUT DEGRÉ

2ème THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 4 MAI 1961 **, devant la Commission d'Examen**

MM. THIRY . . . . Président
GAUTHIER
SIESTRUNCK } Examinateurs
KAMMERER

1961

Série A, N° 3700
N° d'ordre 4551

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Elie ABSI

1ère THÈSE :

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES DE HAUT DEGRÉ

2ème THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le , devant la Commission d'Examen

MM. THIRY . . . . Président
GAUTHIER
SIESTRUNCK } Examinateurs
KAMMERER

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538123_0021

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... J. PÉRÈS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.
BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
PLANTEFOL	T	Botanique.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
WYART	T	Minéralogie et Cristallogr.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN ..	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
P. DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
LUCAS	T	Recherches physiques.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
M. MORAND ...	T	Enseignement de Physique.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS.	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUÉLET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER ..	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES ...	T	Théories physiques.
M. PRUVOST ...	T	Géologie.
AMIEL	T	Chimie des solides.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.
J.-P. MATHIEU .	T	Recherches physiques.
COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Th. des fonct. et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. aéronaut.).
BRELOT	T	Calcul différentiel.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BÉNARD	T	Chimie (E.N.S.C.P.).
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUE	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végét. (E.N.S.).
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Mathématiques générales.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Calcul des probabilités.
E. ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN ..	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (P.C.B.).

Rizet	T	Génétique (Orsay).
Routhier	T	Géologie appliquée.
Mme Tonnelat	T	Relativité.
Dixmier	T	Mathématiques (M.P.C.).
Souchay	T	Chimie (P.C.B.).
Aigrain	T	Electrotechnique générale.
Brusset		Chimie minérale.
M. Lévy	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme Chaix	T	Chimie biologique.
Mme Hurel-Py		Biologie végétale (P.C.B.).
Piaux	T	Chimie (S.P.C.N.).
Brun	T	Mécanique expérimentale des fluides.
Lederer	T	Chimie biologique.
Mme Dubreil	T	Mathématiques.
Mme Lelong	T	Mathématiques (E.N.S.).
Bellair	T	Géologie (S.P.C.N.).
Cotte	T	Physique (M.P.C.).
J.-E. Dubois	T	Chimie (M.P.C.).
Lamotte	T	Zoologie (E.N.S.).
André Michel	T	Chimie minérale (Orsay).
Olmer	T	Energétique général.
Rouault	T	Physique.
Gauthier	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz	T	Chimie physique.
Brossel	T	Physique atomique.
Buser		Biologie animale (P.C.B.).
Camus		Biologie végétale (P.C.B.).
Castaing	T	Physique (Orsay).
Curien	T	Minéralogie et Cristallogr.
Moyse	T	Physiologie végét. (Orsay).
Pannetier	T	Chimie (Orsay).
Possompes	T	Biologie animale (P.C.B.).
Pullmann		Chimie théorique.
Teillac	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
Tonnelat		Biologie physico-chimique.
Ville	T	Econométrie.
Willemart		Chimie (P.C.B.).
Dodé	T	Chimie (Orsay).
Freymann	T	Physique (S.P.C.N.).
Guinochet	T	Biologie végétale (Orsay).
Rollet	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle Josien	T	Chimie (P.C.B.).
Chevalley	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
Arnoult	T	Electronique (Orsay).
Chapelle	T	Physique (Orsay).
Delange	T	Mathématiques (Orsay).
Deny	T	Mathématiques gén. (Orsay).
Germain	T	Mécanique théorique des fluides.
G. Lucas	T	Géologie.
Allard		Chimie physique.
Berthelot	T	Physique fondamentale des hautes énergies (Orsay).
Bricard		Météorologie.
Mme Albe-Fessard		Psychophysiologie.
Friedel		Physique des solides (Orsay).
M. Julia		Chimie organique structurale.
Lender		Biologie animale (S.P.C.N.) (Orsay).
Magat		Physico-chimie des rayonnements.
Mlle Quintin	T	Electrochimie.
Monod	T	Biochimie cellulaire.
Benoit	T	Physiologie animale (Orsay).
de Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky	T	Radiochimie.
Lemée	T	Physiologie B.M.P.V. (Ors.).
Guérin	T	Chimie (Orsay).
M. Chatelet		Chimie (P.C.B.).
Jean		Physique (Orsay).
Mattler	T	Physique (Orsay).
Louis Michel		Physique théorique (Orsay).
Rumpf		Chimie (P.C.B.).
Bergérard		Biologie animale (S.P.C.N.) (Orsay).
Bertein		Electronique (Orsay).
Bouissières		Chimie des radioéléments (Orsay).
Mme Couture		Thermodynamique et Mécanique physique.
Ellenberger		Géologie appliquée.
Franc		Biologie animale (P.C.B.).
Schnell		Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowski		Biologie animale (P.C.B.).
Acher		Chimie biologique (Orsay).
Baudoin		Biologie.
Beaumont		Biologie animale.
Blamont		Géophysique Ionosphère.
Bourreau		Biologie végétale (S.P.C.N.) (Orsay).
D. Curie		Physique (M.G.P.).
Durand-Delga		Géologie.
Fréon		Chimie organique (Orsay).
Heller		Physiologie végétale.
Tortrat		Calcul des probabilités.
Cailleux		Géologie (S.P.C.N.).
Magnan	T	Physique (P.C.B.).
Daudel		Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
Mlle Fourcroy		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Barraud		Physiologie cellulaire.
Mme Fourès-Bruhat	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle Veil		Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique physique et expérimentale.
Lacombe	T	Métallurgie (Orsay).
Brochard	T	Physique (P.C.B.) (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Math. (M.P.C.) (Orsay).
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).

Secrétaire général ..... R. Poullain

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

o o o

J'exprime ma gratitude à tous les Membres du Jury. Je présente mes remerciements à l'Ecole Centrale et au Centre Expérimental du Bâtiment et des Travaux Publics pour l'aide qu'ils m'ont accordée.

INTRODUCTION

L'application des théorèmes généraux en résistance des matériaux (Bresse, Castigliano, Fontviolant, ...) permet la résolution des systèmes hyperstatiques. Mais le calcul devient difficilement abordable dans le cas des systèmes hyperstatiques de haut degré. La résolution se trouve simplifiée en prenant comme inconnues les déformations (rotations et déplacements) des noeuds du système. Ceci nous amène à l'idée des équations intrinsèques qui sont des fonctions linéaires de ces déformations.

Le présent travail étudie les expressions générales des équations intrinsèques des éléments droits et courbes pour des déformations planes ou dans l'espace. De même il traite, en particulier pour les éléments droits, des effets des efforts tranchants et normaux. Une étude générale conduit à la précision de la notion de degré de liberté de déplacement des noeuds et du nombre des déformations indépendantes d'un système.
On démontre qu'il est toujours possible d'établir directement, à partir des équations intrinsèques, autant d'équations linéaires que de déformations en exprimant l'équilibre des noeuds(moments et forces). Le problème revient donc à la résolution d'un système d'équations linéaires qui se prête :

- Au calcul par approximations successives.
- Au calcul par la machine électronique.
- A la résolution par analogie électrique.

Notations

			Page
R	:	Rayon de courbure	4
R_I	:	Rayon de torsion	4
W	:	Energie interne	5
E	:	Coefficient d'élasticité longitudinale	5
G	:	Coefficient d'élasticité transversale	5
I	:	Moment d'inertie	5
S	:	Section	5
Ω	:	Section réduite	5
$\bar{E}$	:	Déformation (rotation ou déplacement)	5
F	:	Sollicitation (couple ou force) ou : Nombre des noeuds d'un système.	5
M	:	Moment	5
T	:	Effort tranchant	5
N	:	Effort normal	5
c	:	Couple	7
θ	:	Rotation	8
K_{ij}	:	Coefficient de rigidité à la torsion	8
t_{ij}	:	Coefficient de transmission	I4
A_{ji}	:	Coefficient de rigidité à la flexion	I5
K_I et K_2	:	Coefficients définis par l'équation (I7)	I7
B_{ij}	:	Coefficient de répercussion	I7
$\overrightarrow{M_{ij}}$	:	Moment exercé par le noeud A_i sur l'élément $A_i A_j$	I7
$\overrightarrow{\Delta_{ij}}$	:	Déplacement relatif du noeud A_i par rapport à A_j.	I8
l	:	Longueur	I8
w	:	$w^2 = \frac{N}{E I} / (1 - \frac{N}{G\Omega})$	20
F_c	:	Force critique de flambage	26

N_c : $N_c = (\frac{\pi}{l})^2 E I.$

$a_{I,2,3}$ et

$b_{I,2}$: Coefficients définis par les équations (33) 29

λ et γ : Coefficients définis par les équations (34) 29

ρ_i : Coefficients définis par les équations (40) 33

d_i : Coefficients définis par les équations (42) 34

D_i : Coefficients définis par les équations (44) 35

δ, D : Degré de liberté de déplacement, équations (65) et (66) 47

C : Nombre total des cellules dans un système 47

L : Nombre total des déformations indépendantes d'un système, équation (70) 49

φ : Potentiel, équation (8I) 62

Conventions

Dans la présente étude, il est convenu que :

En un point d'un élément quelconque, on considère toujours l'effet de la partie gauche sur la partie droite.

Cet effet se réduit à un :

- Moment de flexion : Le sens positif est celui des aiguilles d'une montre.
- Moment de torsion : Même convention que pour la flexion.
- Effort tranchant : Le sens positif est de bas en haut.
- Effort normal : La compression est positive tandis que la traction est négative.

CHAPITRE I

PRINCIPES FONDAMENTAUX

A) HYPOTHESES DE BASE

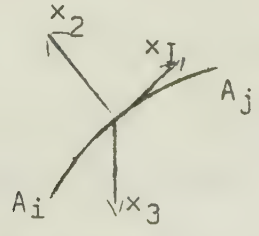
a) On reste dans le domaine de validité des hypothèses de la Résistance des Matériaux.

b) On considère des éléments (rectilignes ou courbes) admettant un plan de symétrie. En particulier, pour les problèmes dans l'espace, la section admet les 2 axes principaux d'inertie comme axes de symétrie.

B) THEOREMES DE BASE : THEOREMES DE CASTIGLIANO ET DE FONTVIOLANT GENERALISES -

Considérons un élément $A_i\ A_j$ à ligne moyenne quelconque dont les rayons de courbure et de torsion (R et R_I) sont grands par rapport aux dimensions de la section et dont la normale principale et la binormale sont deux axes de symétrie de la section.

Soit $(x_I\ x_2\ x_3)$ le trièdre principal en un point de la ligne moyenne. L'énergie interne élastique W de l'élément $A_i\ A_j$ est :



$$(I)\quad W = \frac{I}{2}\int_{A_iA_j} \left(\frac{(M_I)^2}{G\,K} + \frac{(M_2)^2}{E\,I_2} + \frac{(M_3)^2}{E\,I_3} + \frac{(N)^2}{E\,S} + \frac{\left(T_2 - \frac{M_2}{R_I}\right)^2}{G\Omega_2} + \frac{\left(T_3 - \frac{M_I}{R} - \frac{M_3}{R_I}\right)^2}{G\Omega_3} \right) ds$$

La projection ($\bar{E}$) de la déformation en un point (P) de l'élément suivant la direction de la sollicitation (F) appliquée en ce point (P) est donnée par un des deux théorèmes suivants :

- Théorème de Castigliano :

$$(2)\qquad \bar{E} = \frac{\partial W}{\partial F}$$

- Théorème de Bertrand de Fontviolant (B.D.F.) :

$$(3)\quad \bar{E} = \int_{A_iA_j} \left(\frac{M_I.\bar{M}_I}{G\,K} + \frac{M_2.\bar{M}_2}{E\,I_2} + \frac{M_3.\bar{M}_3}{E\,I_3} + \frac{N.\bar{N}}{E\,S} + \frac{\left(T_2 - \frac{M_2}{R_I}\right)\left(\bar{T}_2 - \frac{\bar{M}_2}{R_I}\right)}{G\Omega_2} + \frac{\left(T_3 - \frac{M_I}{R} - \frac{M_3}{R_I}\right)\left(\bar{T}_3 - \frac{\bar{M}_I}{R} - \frac{\bar{M}_3}{R_I}\right)}{G\Omega_3} \right) ds$$

où : $\bar{M}_I$, ... $\bar{T}_3$ correspondent à M_I, ... T_3 dans un élément auxiliaire isostatique qui dérive de l'élément réel en :

a) Supprimant toutes les sollicitations directement appliquées,

b) Supprimant les liaisons surabondantes,

c) Appliquant au point considéré une sollicitation ($\bar{F}$) unitaire suivant la direction de la sollicitation initiale (F).

Si on néglige dans les équations (2) et (3) les termes en (R) et R_I), on retrouve les formes ordinaires des expressions de Castigliano et de Fontviolant (B.D.F.)

Si l'élément est à ligne moyenne plane, on a :

$$\frac{I}{R_I} = 0$$

et l'expression de (B.D.F.) se réduit à :

$$(4)\quad \bar{E} = \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{M_I \cdot \bar{M}_I}{G K} + \frac{M_2 \cdot \bar{M}_2}{E I_2} + \frac{M_3 \cdot \bar{M}_3}{E I_3} + \frac{N \cdot \bar{N}}{E S} + \frac{T_2 \cdot \bar{T}_2}{G \Omega_2} + \frac{(T_3 - \frac{M_I}{R})(\bar{T}_3 - \frac{\bar{M}_I}{R})}{G \Omega_3} \right) \right) ds$$

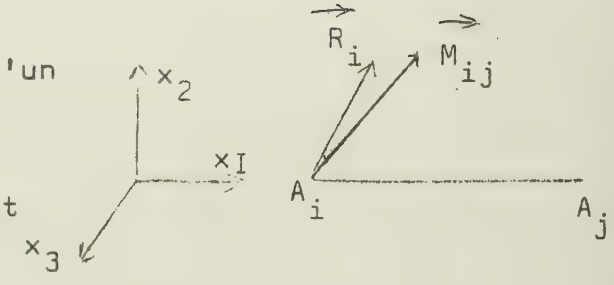
N.B.- La forme généralisée de W est due à Monsieur Kammerer.

CHAPITRE II

ETUDE DES ELEMENTS DROITS

A) CONSIDERATIONS PREALABLES

Soit $A_i\ A_j$ un élément droit d'un système quelconque. Les efforts à l'extrémité A_i se réduisent à un moment $\overrightarrow{M_{ij}}$ et à une force $\overrightarrow{R_i}$.

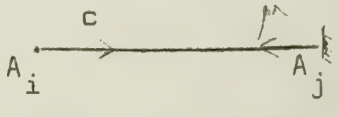


Soit le trièdre $(x_I\ x_2\ x_3)$ dirigé suivant les axes principaux d'inertie de la section de $A_i\ A_j$.

Le théorème de Fontviolant montre qu'il est possible d'étudier l'élément $A_i\ A_j$ suivant les 3 directions $(x_I\ x_2\ x_3)$ séparément. D'ailleurs, ceci est un résultat direct de l'hypothèse de Hook en élasticité.

B) ETUDE DE L'ELEMENT $A_i\ A_j$ SUIVANT (x_I)

L'application d'un couple (c) en (A_i) se traduit par :



- L'apparition d'un couple $\curlywedge$ en (A_j) tel que :

(5) $\qquad \curlywedge = -c$

- La rotation $(\theta_i)_I$ de (A_i) :

$$c = K_{ij} \, (\theta_i)_I$$

où : K_{ij} : coefficient de rigidité à la torsion de $A_i \, A_j$ donné à partir de l'équation (4) :

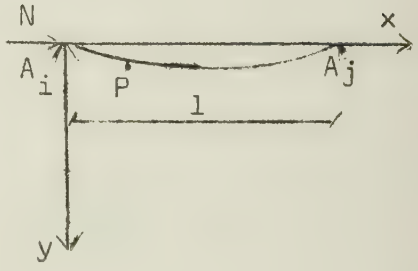
$$(\theta_i)_I = \int_{A_i \, A_j} \frac{c}{G \, K} \, ds$$

(6) $$\longrightarrow K_{ij} = \frac{I}{\int_{A_i A_j} \frac{ds}{G \, K}}$$

C)- ETUDE SUIVANT (x_2) OU (x_3)

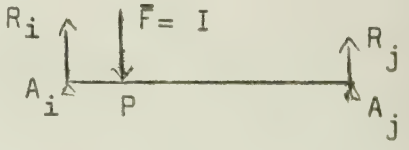
I) DETERMINATION DE LA DEFORMATION (y)

Soient : (M + Ny), (N) et (T) le moment de flexion, l'effort normal et l'effort tranchant en un point P d'abscisse (x).



On se propose de déterminer le déplacement (y) en P par le th. de B.D.F.

Déchargeons complètement l'élément $A_i \, A_j$ et assimilons-le à un élément sur deux appuis simples. L'application d'une force unitaire ($\bar{F} = I$) en P, nous permet d'écrire :



$$R_i = \frac{I - x}{I}$$

$$R_j = \frac{x}{I}$$

L'expression (4) de B.D.F. s'écrit :

$$y = \int_0^l \left(\frac{(M + N \, . \, y) \, \bar{M}}{E \, I} + \frac{N \, . \, \bar{N}}{E \, S} + \frac{T \, . \, \bar{T}}{G \int L} \right) ds$$

où : $\bar{N} = 0$

Pour $s < x$: $\bar{T} = R_i = \frac{l - x}{l}$

$\bar{M} = R_i \cdot s = \frac{l - x}{l} \cdot s$

Pour $s > x$: $\bar{T} = -R_j = -\frac{x}{l}$

$\bar{M} = R_j (l - s) = \frac{x}{l} (l - s).$

En portant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouve:

$$y = \int_0^x \left(\frac{M + N \cdot v}{E I} \cdot \frac{l - x}{l} \cdot s + \frac{T}{G \Omega} \cdot \frac{l - x}{l} \right) ds +$$

$$\int_x^l \left(\frac{M + N \cdot v}{E I} \cdot \frac{l - s}{l} \cdot x - \frac{T}{G \Omega} \cdot \frac{x}{l} \right) ds$$

D'où :

$$\frac{d v}{d x} = -\frac{1}{I} \int_0^l \left(s \frac{M + N \cdot v}{E I} + \frac{T}{G \Omega} \right) ds + \frac{T}{G \Omega}$$

$$+ \int_x^l \frac{M + N \cdot v}{E I} \, ds$$

et $$\left(\frac{d^2 v}{d x^2} \right) = \frac{d}{d x} \left(\frac{T}{G \Omega} \right) - \frac{M + N \cdot v}{E I}$$

$$= T \frac{d}{d x} \left(\frac{1}{G \Omega} \right) + \frac{1}{G \Omega} \frac{d T}{d x} - \frac{M + N \cdot v}{E I}$$

Mais :

$$T = \frac{d}{d x} (M + N y)$$

et

$$\frac{d T}{d x} = \frac{d^2}{(d x)^2} (M + N y) = - p + N \frac{d^2 y}{(d x)^2}$$

où : p : charge par unité de longueur.

L'équation précédente devient alors :

$$(1 - \frac{N}{G \Omega}) \frac{d^2 y}{(d x)^2} + \frac{N y}{E I} = T \frac{d}{d x} \frac{1}{G \Omega} - \frac{1}{G \Omega} p - \frac{M}{E I}$$

Finalement, on a :

$$y'' + f(x) y = h(x) \tag{7}$$

où :

$$f(x) = \frac{N}{E I} / (1 - \frac{N}{G \Omega})$$

$$h(x) = \left[- \frac{M}{E I} + T \frac{d}{d x} (\frac{1}{G \Omega}) - \frac{1}{G \Omega} p \right] / (1 - \frac{N}{G \Omega}) \tag{8}$$

Pour résoudre l'équation (7), posons :

$$y = u \cdot v$$

où u : est une solution particulière de :

$$u'' + u f(x) = 0 \tag{9}$$

soumise à la condition :

$$u(0) \neq 0$$

D'où :

$$y'' = u'' v + 2 v' u' + v'' u.$$

L'équation (7) devient alors :

$$u'' v + 2 v' u' + v'' u + u v f(x) = h(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}(u^2 v') = u h(x)$$

$$u^2 v' = a + \int_0^x u h(x)\, dx$$

$$= a + H(x)$$

où : a : Constante d'intégration

(10) $$H(x) = \int_0^x u h(x)\, dx$$

Par suite :

$$v = b + \int_0^x \frac{a + H(x)}{u^2}\, dx$$

Finalement :

$$y = u \cdot v = u \left[b + \int_0^x \frac{a + H(x)}{u^2}\, dx \right]$$

Conditions aux limites :

Pour $x = 0$: $y(0) = 0 \longrightarrow b = 0$

Pour $x = 1$: $y(1) = 0$

(11) $$\longrightarrow a = - \frac{\int_0^1 \frac{H(x)}{u^2}\, dx}{\int_0^1 \frac{dx}{u^2}}$$

Finalement :

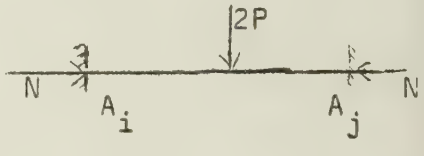
$$(I2) \qquad y = u \int_{o}^{x} \frac{a + H(x)}{u^2} \, dx$$

II) ETUDE DE L'EQUILIBRE DE L'ELEMENT $A_i - A_j$.

L'équation (7) est une équation différentielle linéaire en (y). Donc, en maintenant toujours la même fonction f (x) (c'est-à-dire en maintenant N), on peut superposer différents cas d'équilibre correspondant à différentes expressions de la fonction h (x).

On peut donc considérer l'équilibre de l'élément A_i A_j comme étant la superposition des 3 états d'équilibre suivants :

Ier ETAT : L'élément est parfaitement encastré à ses 2 extrémités A_i et A_j et il est soumis à toutes ses charges.



Les moments d'encastrement m_{ij} et m_{ji} qui apparaissent respectivement en A_i et A_j sont des fonctions de (N).

Pour une charge 2 P concentrée au milieu de A_i A_j de longueur l, on a :

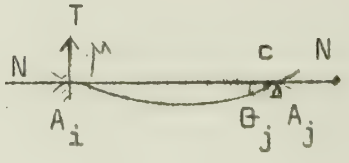
$$(I2)^{bis} \qquad m_{ij} = -m_{ji} = -\frac{P\,l}{w\,l} \cdot \operatorname{tg} \frac{w\,l}{4}$$

où $(w)^2 = \dfrac{N}{E\,I}$

Si N = 0 , on trouve :

$$m_{ij} = -m_{ji} = -\frac{Pl}{4}$$

2ème ETAT : L'élément n'est soumis qu'à la force N. L'extrémité A_i est encastrée



tandis que A_j est sur appui simple. Appliquons en A_j un couple c. Soient (μ) et (T) les réactions qui apparaissent en A_i. On a :

$$T\,l = -(\mu + c)$$

$$M = \mu + T\,x$$

Les équations (8) s'écrivent alors :

$$f(x) = \frac{N}{E\,I} \Big/ \left(1 - \frac{N}{G\Omega}\right) = N\,\alpha \qquad \text{où : } \alpha = \frac{1}{E\,I} \Big/ \left(1 - \frac{N}{G\Omega}\right)$$

$$\text{(I3)} \quad h(x) = \left[-\frac{\mu + T\,x}{E\,I} + T\,\frac{d}{d\,x}\left(\frac{1}{G\Omega}\right)\right] \Big/ \left(1 - \frac{N}{G\Omega}\right)$$

$$= -(T\beta + \mu)\,\alpha \qquad \text{où : } \beta = x - E\,I\,\frac{d}{d\,x}\left(\frac{1}{G\Omega}\right)$$

De l'équation (I2), nous avons :

$$y = u \int_0^x \frac{a + H(x)}{u^2}\,d\,x$$

$$\text{(I4)} \qquad y' = u' \int_0^x \frac{a + H(x)}{u^2}\,d\,x + \frac{1}{u}\left[a + H(x)\right]$$

Pour $x = 0$: $y'(0) = \dfrac{a + H(0)}{u(0)} = \dfrac{a}{u(0)}$

Mais $y'(0)$ représente le glissement de la section en A_i qui est égal à :

$$y'(0) = \frac{T}{G\Omega_0}$$

D'où : $$a = \frac{T \cdot u(0)}{G\Omega_0}$$

De l'équation (11) on a alors :

$$a = - \frac{\int_0^1 \frac{H(x)}{u^2} dx}{\int_0^1 \frac{dx}{u^2}} = \frac{T \cdot u(0)}{G \Omega_0}$$

$$\text{ou : } \frac{T \cdot u(0)}{G \Omega_0} \int_0^1 \frac{dx}{u^2} = - \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^x u \; h(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^x u \cdot \alpha \, (T\beta + \mu) \, dx$$

D'où :

$$\mu \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^x u \cdot \alpha \cdot dx = T \left(\frac{u(0)}{G \Omega_0} \int_0^1 \frac{dx}{u^2} - \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^{\bar{x}} u \cdot \alpha \cdot \beta \, dx \right)$$

$$(I5) \qquad = T \int_0^1 \left(\frac{u(0)}{G \Omega_0} - \int_0^x u \cdot \alpha \cdot \beta \, dx \right) \frac{dx}{u^2}$$

a) <u>Coefficient de transmission</u> : (t_{ji})

Par définition, le coefficient de transmission (t_{ji}) est :

$$t_{ji} = \frac{\mu}{c} = - \frac{\mu}{T\,1 + \mu} = - \frac{\mu / T}{1 + \mu / T}$$

De l'équation (I5), on peut écrire :

$$t_{ji} = - \frac{\int_0^1 \left(\frac{u(0)}{G \Omega_0} - \int_0^x u \cdot \alpha \cdot \beta \, dx \right) \frac{dx}{u^2}}{1 \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^x u \cdot \alpha \cdot dx + \int_0^1 \left(\frac{u(0)}{G \Omega_0} - \int_0^x u \cdot \alpha \cdot \beta \, dx \right) \frac{dx}{u^2}}$$

$$(I6) \qquad t_{ji} = - \frac{\int_o^1 \left(\frac{u(0)}{G\Lambda_o} - \int_o^x u \cdot \alpha \cdot \beta \cdot dx \right) \frac{dx}{u^2}}{\int_o^1 \left(\frac{u(0)}{G\Lambda_o} + \int_o^x (1 - \beta)\, u \cdot \alpha\, dx \right) \frac{dx}{u^2}}$$

b) <u>Coefficient de rigidité</u> : (A_{ji})

Par définition, le coefficient de rigidité (A_{ji}) est :

$$A_{ji} = \frac{c}{\theta_j}$$

De l'équation (I4) on peut écrire :

$$y'(1) = \theta j + \frac{T}{G\Lambda_1} = u' \int_o^1 \frac{a + H(x)}{u^2} dx + \frac{a + H(1)}{u(1)} = \frac{a + H(1)}{u(1)}$$

car de l'équation (11) :

$$a = - \frac{\int_o^1 \frac{H(x)}{u^2} dx}{\int_o^1 \frac{dx}{u^2}}$$

Mais de l'équation (I0), on a :

$$H(1) = \int_o^1 u\, h(x)\, dx$$

D'où :

$$a + H(1) = - \frac{\int_o^1 \frac{H(x)}{u^2} dx}{\int_o^1 \frac{dx}{u^2}} + \int_o^1 u\, h(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\int_0^1 \frac{dx}{u^2}} \left(- \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_0^x u\, h(x)\, dx + \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \cdot \int_0^1 u\, h(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\int_0^1 \frac{dx}{u^2}} \left(\int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_x^1 u\, h(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{-1}{\int_0^1 \frac{dx}{u^2}} \left(\int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_x^1 u\, (T\beta + \mu)\, \alpha\, dx \right)$$

L'expression précédente devient finalement :

$$\theta_j = \frac{a + H(1)}{u(1)} - \frac{T}{G\Omega_1}$$

$$= -T \left(\frac{1}{G\Omega_1} + \frac{1}{u(1) \int_0^1 \frac{dx}{u^2}} \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_x^1 u \cdot \alpha \cdot \beta\, dx \right)$$

$$- \mu \left(\frac{1}{u(1) \int_0^1 \frac{dx}{u^2}} \int_0^1 \frac{dx}{u^2} \int_x^1 u \cdot \alpha\, dx \right)$$

Pour simplifier l'écriture, posons l'expression précédente sous la forme :

$$\theta_j = -K_1 (T\,1) - K_2 \mu = -\left(K_1 \frac{T\,1}{c} + K_2 \frac{\mu}{c}\right) c$$

Mais on a :

$$\frac{\int}{c} = t_{ji}$$

$$\frac{T\,1}{c} = -\frac{(c + \int)}{c} = -(1 + t_{ji})$$

D'où :

$$(I7) \qquad A_{ji} = \frac{c}{\theta_j} = \frac{1}{K_1\,(1 + t_{ji}) - K_2\,t_{ji}} = \frac{1}{(K_1 - K_2)\,t_{ji} + K_1}$$

c) Coefficient de répercussion : B_{ji}

Par définition, le coefficient de répercussion B_{ji} est :

$$(I8) \qquad B_{ji} = \frac{\int}{\theta_j} = \frac{c \cdot t_{ji}}{\theta_j} = A_{ji} \cdot t_{ji}$$

3ème ETAT : A l'inverse du 2ème état, l'extrémité (A_i) est sur appui simple tandis que (A_j) est encastrée. On définit de la même façon les coefficients suivants en A_i :

- Coefficient de rigidité : $A_{ij} = \frac{c'}{\theta_i}$
- Coefficient de transmission : $t_{ij} = \frac{\int'}{c'}$
- Coefficient de répercussion : $B_{ij} = \frac{\int'}{\theta_i} = A_{ij} \cdot t_{ij}$

L'équilibre définitif de l'élément $A_i\,A_j$ s'obtient par la superposition des 3 états précédents. Les moments M_{ij} et M_{ji} agissant respectivement aux extrémités A_i et A_j sont donnés alors par :

$$(I9) \qquad \begin{aligned} M_{ij} &= m_{ij} + A_{ij}\,\theta_i + B_{ij}\,\theta_j \\ M_{ji} &= m_{ji} + A_{ji}\,\theta_i + B_{ji}\,\theta_i \end{aligned}$$

Remarques :

I) Les différents coefficients établis précédemment dépendent uniquement des caractéristiques mêmes de l'élément et de la force normale (N).

2) Généralement, on a :

$$t_{ij} \neq t_{ji}$$

$$A_{ij} \neq A_{ji}$$

Par contre, on a toujours :

$$B_{ij} = B_{ji}$$

En effet, en considérant le 2ème et le 3ème cas, on peut écrire d'après le principe de réciprocité de Maxwell :

$$\Gamma'\theta_j = \Gamma\theta_i$$

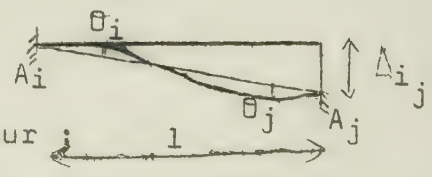
ou

$$\frac{\Gamma'}{\theta_i} = \frac{\Gamma}{\theta_j}$$

(20) $$\rightarrow \quad B_{ij} = B_{ji}$$

III) - EFFET D'UN DEPLACEMENT RELATIF $\overrightarrow{\Delta}_{ij}$ DES 2 EXTREMITES

Le déplacement relatif ($\overrightarrow{\Delta}_{ij}$) des 2 extrémités A_i et A_j dans le sens des aiguilles d'une montre correspond à une rotation négative des 2 extrémités de valeur :



(2I) $$\theta_i = \theta_j = -\frac{\Delta_{ij}}{l}$$

IV) EQUATIONS INTRINSEQUES

Les moments M_{ij} et M_{ji} agissant respectivement aux 2 extrémités A_i et A_j peuvent être exprimés en fonction des déformations en A_i et A_j par les équations intrinsèques suivantes déduites des équations (20 et (2I) :

$$M_{ij} = m_{ij} + A_{ij}\,\theta_i + B_{ij}\,\theta_j - (A_{ij} + B_{ij})\,\frac{\Delta_{ij}}{l}$$

(22)

$$M_{ji} = m_{ji} + A_{ji}\,\theta_j + B_{ji}\,\theta_i - (A_{ji} + B_{ji})\,\frac{\Delta_{ij}}{l}$$

On a 2 équations intrinsèques pour chacune des 2 directions (x_2) et (x_3).

V) CAS PARTICULIERS . a) Section quelconque.

I) On néglige l'effet de l'effort normal (N) : C'est le cas d'une poutre continue sur plusieurs appuis. On a des équations (9) et (I3) :

$$f(x) = 0$$

(23)

$$\varkappa = \frac{1}{E\,I}$$

$$u'' = 0$$

On peut donc prendre comme solution particulière :

$$u = \text{cte} \neq 0$$

2) On néglige l'effet de l'effort tranchant (T) :

Tous les termes en $\frac{1}{G\Omega}$ disparaissent. On aura alors :

$$f(x) = \frac{N}{E\,I}$$

(24)

$$\varkappa = \frac{1}{E\,I}$$

$$\beta = x$$

b) Section constante.

C'est le cas qui présente le plus d'intérêt dans la pratique. On a alors dans ce cas :

$$t = t_{ij} = t_{ji}$$

$$A = A_{ij} = A_{ji}$$

$$B = B_{ij} = B_{ji}$$

Les équations (I3) deviennent :

$$\alpha = \frac{1}{E I} / (1 - \frac{N}{G \Omega}) = cte$$

$$f = N \cdot \alpha = cte \qquad (25)$$

$$\beta = x$$

$$h(x) = - (T x + \mu) \alpha$$

Considérons les cas suivants :

I) N agit en compression ($N > 0$) :

L'équation (9) devient :

$$u'' + w^2 u = 0 \qquad (w^2 = f = N \cdot \alpha)$$

On peut prendre comme solution particulière :

$$u = \cos w x$$

Elle remplit la condition $u(0) = 1 \neq 0$

En conséquence :

Le coefficient de transmission donné par l'équation (I6) devient :

$$t = - \frac{\int_0^1 \left(\frac{1}{G\Omega} - \int_0^x \alpha . x . \cos w x . d x \right) \frac{d x}{\cos^2 w x}}{\int_0^1 \left(\frac{1}{G\Omega} + \int_0^x \alpha (1 - x) \cos w x \, d x \right) \frac{d x}{\cos^2 w x}}$$

Tout calcul fait on trouve :

$$(26) \quad t = - \frac{\frac{w^2 \sin w 1}{\alpha G \Omega} - (w 1 - \sin w 1)}{\frac{w^2 \sin w 1}{\alpha G \Omega} + (\sin w 1 - w 1 \cos w 1)}$$

Pour le coefficient de rigidité, on a dans l'équation (I7) :

$$K_1 = \frac{1}{G\Omega} + \frac{1}{\cos w 1 \int_0^1 \frac{d x}{\cos^2 w x}} \int_0^1 \frac{d x}{\cos^2 w x} \int_x^1 \alpha . x . \cos w x \, d x$$

$$= \frac{1}{G\Omega} + \frac{\alpha}{w^2 \sin w 1} (\sin w 1 - w 1 \cos w 1)$$

$$(27) \quad K_2 = \frac{1}{\cos w 1 \int_0^1 \frac{d x}{\cos^2 w x}} \int_0^1 \frac{d x}{\cos^2 w x} \int_x^1 \alpha . \cos w x \, d x =$$

$$= \frac{\alpha}{w \sin w 1} (1 - \cos w 1)$$

$$A = \frac{1}{(K_1 - K_2) t + K_1}$$

$$B = A . t$$

Si l'effet de l'effort tranchant est négligeable, les expressions précédentes se réduisent à :

$$t = \frac{w\,l - \sin w\,l}{\sin w\,l - w\,l \cos w\,l}$$

$$K_I = \frac{\alpha}{l\,w^2 \sin w\,l}\,(\sin w\,l - w\,l \cos w\,l)$$

(28)
$$K_2 = \frac{\alpha}{w \sin w\,l}\,(1 - \cos w\,l)$$

$$A = \frac{w\,l\,(w\,l \cos w\,l - \sin w\,l)}{w\,l \sin w\,l - 2\,(1 - \cos w\,l)} \cdot \frac{E\,I}{l}$$

$$B = \frac{w\,l\,(\sin w\,l - w\,l)}{w\,l \sin w\,l - 2\,(1 - \cos w\,l)} \quad \frac{E\,I}{l}$$

(2) <u>N agit en traction ($N < 0$)</u>.

L'équation (9) devient :

$$u'' - w^2 u = 0 \qquad (w^2 = -N \cdot \alpha)$$

On peut prendre comme solution particulière :

$$u = \operatorname{ch} w\,x$$

On parvient ainsi à une équation semblable à l'équation (26) :

(29)
$$t = -\frac{\frac{w^2 \operatorname{sh} w\,l}{\alpha G \Omega} + (w\,l - \operatorname{sh} w\,l)}{\frac{w^2 \operatorname{sh} w\,l}{\alpha G \Omega} + (w\,l \operatorname{ch} w\,l - \operatorname{sh} w\,l)}$$

En négligeant l'effet de l'effort tranchant, on parvient à des équations semblables aux équations (28) :

$$t = \frac{w\,l - sh\,w\,l}{sh\,w\,l - w\,l\,ch\,w\,l}$$

(30)
$$A = \frac{w\,l\,(w\,l\,ch\,w\,l - sh\,w\,l)}{w\,l\,sh\,w\,l + 2\,(1 - ch\,w\,l)} \cdot \frac{E\,I}{l}$$

$$B = \frac{w\,l\,(sh\,w\,l - w\,l)}{w\,l\,sh\,w\,l + 2\,(1 - ch\,w\,l)} \cdot \frac{E\,I}{l}$$

Les diagrammes (I), (2) et (3) donnent, pour les 2 cas précédents les variations de A, B et t en fonction de :

$$\frac{N}{N_c} = \left(\frac{w\,l}{\pi}\right)^2 \quad \text{où} \quad N_c = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E\,I.$$

3) <u>L'effet de l'effort normal est négligeable</u>

En faisant tendre ($w\,l \to 0$), les équations (26) et (27) feront apparaître l'effet de l'effort tranchant uniquement et on trouvera :

$$t = -\frac{6 - \alpha G \Omega l^2}{6 + 2\alpha G \Omega l^2} = \frac{l^2 - 6\,E\,I / G\Omega}{2\,l^2 + 6\,E\,I / G\Omega} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{E\,I}\right)$$

$$K_I = \frac{1}{l\,G\Omega} + \frac{l\alpha}{3}$$

(3I)
$$K_2 = \frac{l\alpha}{2}$$

$$A = \frac{4\,(3 + \alpha G \Omega l^2)}{12 + \alpha G \Omega l^2} \cdot \frac{1}{l\alpha} = \frac{(l^2 + 3\,E\,I / G\Omega)}{l^2 + 12\,E\,I / G\Omega} \cdot \frac{4\,E\,I}{l}$$

$$B = A \cdot t = \frac{l^2 - 6\,E\,I / G\Omega}{l^2 + 12\,E\,I / G\Omega} \cdot \frac{2\,E\,I}{l}$$

On voit de ces expressions que, pour $\left(l^2 = \frac{6\,E\,I}{G\Omega}\right)$, on a :

$$t = B = 0$$

Applications numériques :

- Pour une barre d'acier de diamètre (D), on a :

$$l^2 = \frac{6\,E\,I}{G\,\Omega} = 6 \times 2{,}5 \times \frac{\pi D^4}{64} \times \frac{10}{9} \times \frac{4}{\pi D^2} = \frac{25}{24}\,D^2$$

$$\rightarrow D = \sqrt{\frac{24}{25}}\,l = 0{,}98\,l$$

- Pour une poutre en béton armé de section carrée (a x a) :

$$l^2 = \frac{6\,E\,I}{G\,\Omega} = 6 \cdot 2{,}3 \cdot \frac{a^4}{12} \cdot \frac{6}{5\,a^2} = 1{,}38\,a^2$$

$$\longrightarrow a = 0{,}85\,l$$

Or, pour de telles dimensions, les hypothèses de la résistance des matériaux ne sont pas valables.

Le diagramme (4) donne les variations de A, B et t en fonction de $\frac{E\,I}{G\,\Omega} \cdot \frac{1}{l^2}$.

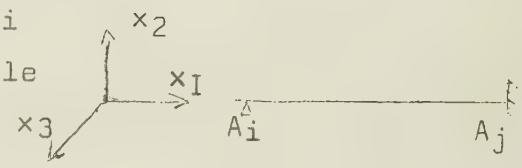
4) <u>Les effets des efforts normal et tranchant sont négligeables</u>.

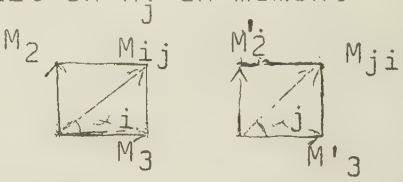
En faisant tendre (w $l \rightarrow 0$) dans les équations (28), ou en négligeant les termes en $\left(\frac{1}{G\,\Omega}\right)$ dans les équations (31), on retrouve les résultats bien connus :

(32) $\quad t = 0{,}5 \qquad A = \frac{4\,E\,I}{l} \qquad B = \frac{2\,E\,I}{l}$

D)- APPLICATION : DEVIATION DU VECTEUR MOMENT

L'élément $A_i\ A_j$ est articulé en A_i et encastré en A_j. Appliquons en A_i un couple (M_{ij}) parallèle au plan $(x_2\ x_3)$ et de composantes (M_2, M_3). Par répercussion, il apparaît en A_j un moment M_{ji} de composantes $(M'_2\ M'_3)$. On peut écrire :





$$tg\alpha_j = \frac{(M'_2)}{(M'_3)} = \frac{(t_{ij})_2}{(t_{ij})_3}\ \frac{(M_2)}{(M_3)} = \frac{(t_{ij})_2}{(t_{ij})_3} \cdot tg\alpha_i = k\ tg\alpha_i$$

où : $k = \dfrac{(t_{ij})_2}{(t_{ij})_3}$ est le coefficient de déviation.

Donc, le vecteur moment tourne d'un angle (θ) :

$$\theta = \alpha_j - \alpha_i$$

et $$tg\ \theta = tg\ (\alpha_j - \alpha_i) = \frac{tg\alpha_j - tg\alpha_i}{1 + tg\alpha_j \cdot tg\alpha_i}$$

ou $$tg\ \theta = \frac{(k-1)\ tg\alpha_i}{1 + k\ tg^2\alpha_i}$$

Déterminons la valeur de $(\alpha_i)_c$ qui rend (θ) max. :

$$\frac{d}{d\alpha_i}\ (tg\ \theta) = \frac{k-1}{\cos^2\alpha_i (1 + k\ tg^2\alpha_i)^2}\ (1 - k\ tg^2\alpha_i) = 0$$

D'où :

$$\operatorname{tg} (\alpha_i)_c = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha_j)_c = k \operatorname{tg} \alpha_i = \sqrt{k}$$

$$\operatorname{tg} (\theta)_{max} = \frac{(k-1)\frac{1}{\sqrt{k}}}{1 + \frac{k}{k}} = \frac{(k-1)\sqrt{k}}{2k}$$

On constate que :

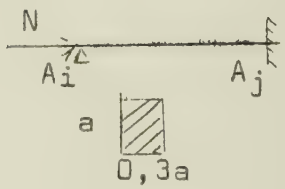
$$\operatorname{tg} (\alpha_i)_c \cdot \operatorname{tg} (\alpha_j)_c = 1$$

Donc, les 2 angles $(\alpha_i)_c$ et $(\alpha_j)_c$ sont complémentaires :

$$(\alpha_i)_c + (\alpha_j)_c = \frac{\pi}{2}$$

- APPLICATION NUMERIQUE

L'élément $A_i A_j$ est de section rectangulaire (a . 0,3 a). Il est soumis à un effort normal N égal à la moitié de la force critique de flambage (F_c) suivant le grand axe :



$$N = \frac{1}{2} F_c = E I_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

ou $$\frac{N}{(N_c)_2} = 1$$

De même, on a suivant le petit axe :

$$\frac{N}{(N_c)_3} = \frac{N}{(N_c)_2} \cdot \left(\frac{0,3\ a}{a}\right)^2 = 0,09$$

Pour ces 2 rapports le diagramme (3) donne :

$$(t_{ij})_2 = 1$$

$$(t_{ij})_3 = 0,5I$$

d'où

$$k = \frac{1}{0,5I} = 1,96I$$

$$tg\ \alpha_j = \sqrt{k} = I,40I \rightarrow \alpha_j = 35^\circ\ 30'$$

$$\alpha_i = 90 - 35^\circ\ 30' = 54^\circ\ 30'$$

$$\theta = \alpha_i - \alpha_j = I9^\circ$$

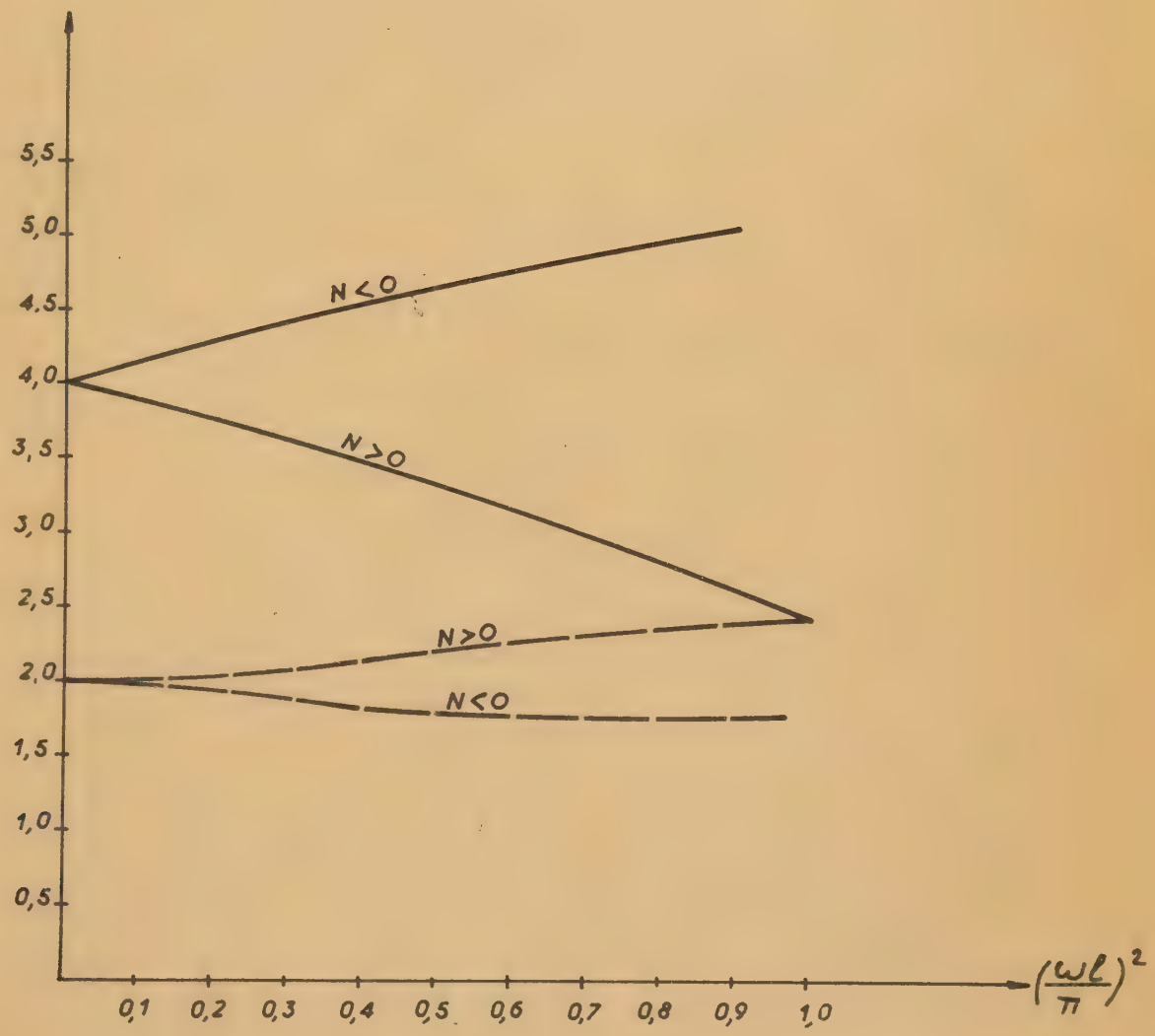
Effet de l'effort normal.

Compression $N > 0$.

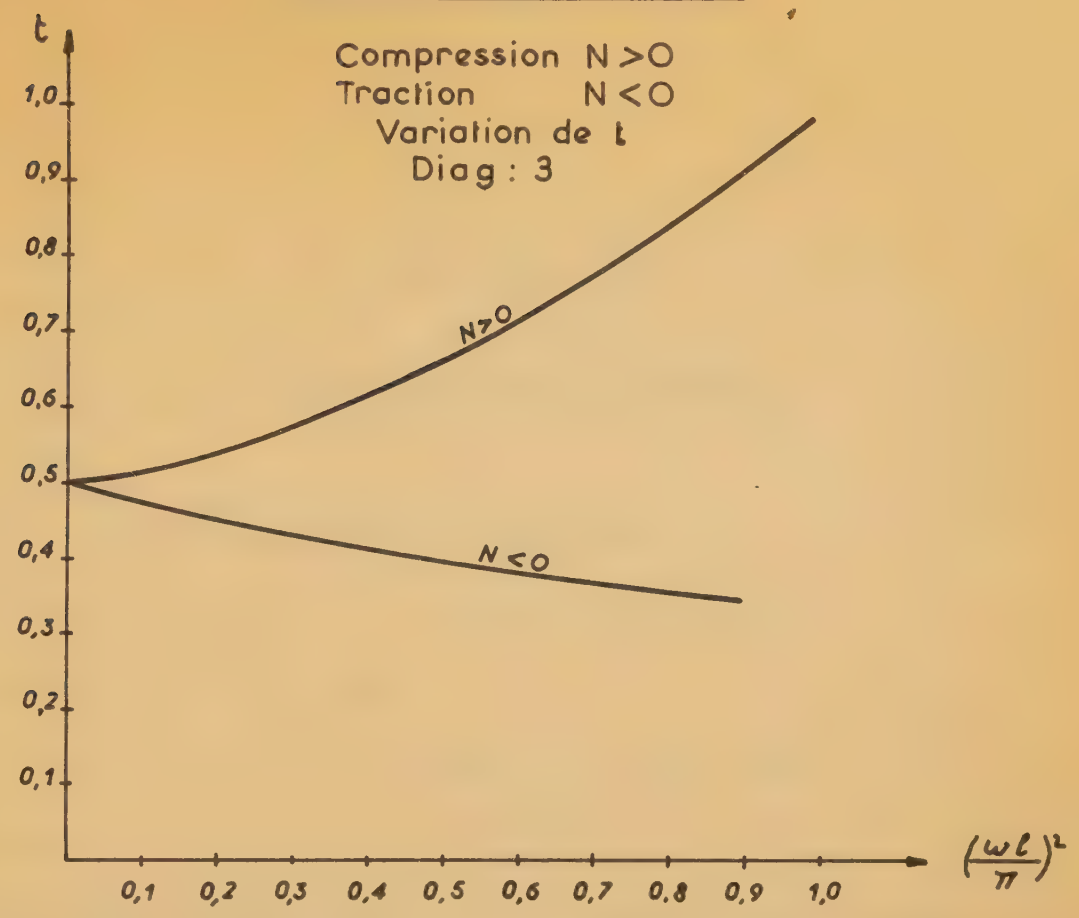
Traction $N < 0$.

——— Diag 1: variation de $A \times \frac{l}{EI}$.

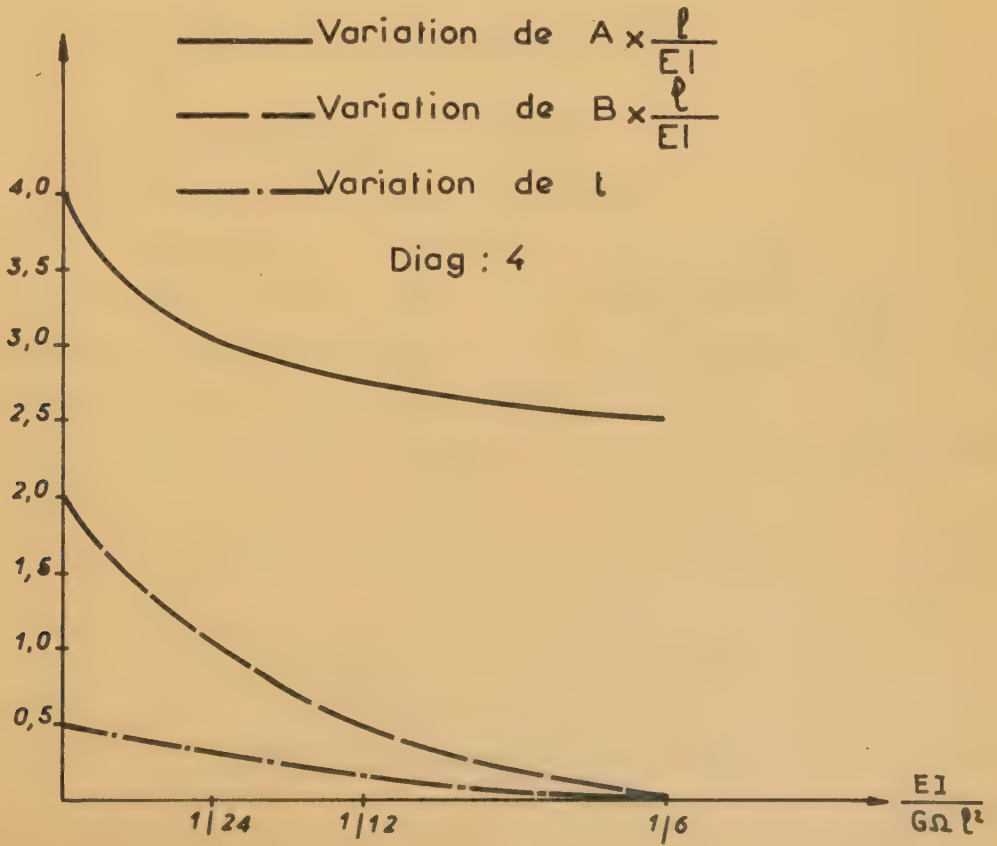
— — — Diag 2: variation de $B \times \frac{l}{EI}$.



Effet de l'effort normal.



Effet de l'effort tranchant.



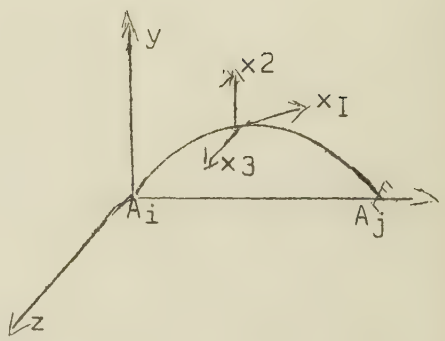
CHAPITRE III

ETUDE DES ELEMENTS COURBES

A) CONSIDERATIONS PREALABLES

L'élément $A_i\ A_j$ admet le plan (x y) comme plan de symétrie.

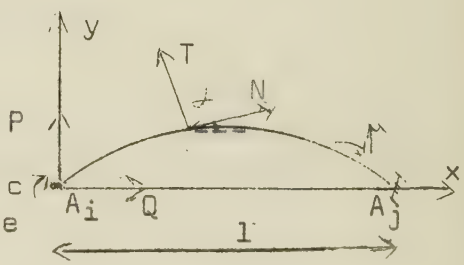
Tout couple appliqué en A_i peut être décomposé en un couple parallèle à z et un autre contenu dans le plan x y.



B) ETUDE D'UN COUPLE SUIVANT (z).

I) RESOLUTION DU PROBLEME.

L'extrémité A_i est articulée et A_j est encastrée. Appliquons en A_i un couple (c) suivant l'axe (z). Par réaction il apparaît en A_j un couple $\curvearrowright$. On se propose de déterminer les réactions Q et V et la rotation (θ_i) en A_i à partir du théorème de Castigliano :



En un point quelconque P on a :

$$M = c + v\,x - Q\,y$$

$$N = V \sin\alpha + Q \cos\alpha$$

$$T = V \cos\alpha - Q \sin\alpha$$

De l'équation (I), on a :

$$W = \frac{1}{2} \int_{A_i\ A_j} \left(\frac{M^2}{E\ I} + \frac{N^2}{E\ S} + \frac{T^2}{G\ \Omega}\right) ds$$

$$\frac{\delta W}{\delta Q} = \int_{Ai\ Aj} \left(- \frac{c + V\ x - Q\ v}{E\ I}\ y + \frac{V \sin\alpha + Q \cos\alpha}{E\ S} \cos\alpha - \right.$$

$$\left. \frac{V \cos\alpha - Q \sin\alpha}{G\ \Omega} \times \sin\alpha \right) ds = 0$$

$$\frac{\delta W}{\delta V} = \int_{Ai\ Aj} \left(\right.$$

$$\left. \frac{c + V\ x - Q\ v}{E\ I}\ x + \frac{V \sin\alpha + Q \cos\alpha}{E\ S} \sin\alpha + \right.$$

$$\left. \frac{V \cos\alpha - Q \sin\alpha}{G\ \Omega} \times \cos\alpha \right) ds = 0$$

ou $Q \int_{Ai\ Aj} \left(\frac{v2}{E\ I} + \frac{\cos^2\alpha}{E\ S} + \frac{\sin^2\alpha}{G\ \Omega}\right) ds + V \int_{AiAj} \left(- \frac{x\ v}{E\ I} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{E\ S} - \right.$

$$\left. - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{G\ \Omega} \right) ds = C \int_{Ai\ Aj} \frac{v}{E\ I}\ ds$$

$$Q \int_{Ai\ Aj} \left(- \frac{y\ x}{E\ I} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{E\ S} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{G\ \Omega} \right) ds +$$

$$V \int_{AiAj} \left(\frac{x^2}{E\ I} + \frac{\sin^2\alpha}{E\ S} + \frac{\cos^2\alpha}{G\ \Omega} \right) ds = - C \int_{Ai\ Aj} \frac{x}{E\ I}\ ds$$

Ecrivons ces 2 équations pour simplifier, sous la forme :

$$a_1\ Q + a_2\ V = b_1\ c$$

(33)

$$a_2\ Q + a_3\ V = b_2\ c$$

Ce système d'équations nous donne pour Q et V :

$$Q = \frac{b_1\ a_3 - b_2\ a_2}{a_1\ a_3 - (a_2)^2}\ c = \lambda\ c$$

(34)
$$V = \frac{b_2\, a_I - b_I\, a_2}{a_I\, a_3 - (a_2)^2}\, c = \gamma\, c$$

De même, on a :
$$\theta_i = \frac{\delta W}{\delta C} = \int_{A_i\, A_j} \frac{c + v\, x - Q\, v}{E\, I}\, ds$$

ou

(35)
$$\theta_i = C \int_{A_i\, A_j} \frac{1 + \gamma x - \lambda v}{E\, I}\, ds$$

II) <u>COEFFICIENT DE RIGIDITE</u> A_{ij} :

De l'équation (35), on a :

(36)
$$A_{ij} = \frac{c}{\theta_i} = \frac{1}{\int_{A_i A_j} \frac{1 + \gamma x - \lambda v}{E\, I}\, ds}$$

III) <u>COEFFICIENT DE TRANSMISSION</u> (t_{ij}) :

On a :
$$\mu = -(c + V\, l)$$
$$= -c\,(1 + \gamma\, l)$$

D'où :

(37)
$$t_{ij} = \frac{\mu}{c} = -(1 + \gamma\, l)$$

IV) <u>COEFFICIENT DE REPERCUSSION</u> : B_{ij}

On a :
$$B_{ij} = \frac{\mu}{\theta\, i} = A_{ij} \cdot t_{ij}$$

(38) $$B_{ij} = -\frac{1 + \chi\, 1}{\int_{Ai\ Aj} \frac{I + \chi x - \lambda v}{E\ I}\, ds}$$

V) REMARQUES

a) Les expressions précédentes se simplifient énormément en ne tenant compte que de la fraction $\frac{G\Omega}{E\ S} < 1$ de l'effet de l'effort tranchant. Ceci se justifie par le fait que l'effet de l'effort tranchant est, dans les cas courants, négligeable vis-à-vis du moment de flexion et de l'effort normal.

En ce cas, les coefficients dans les équations (33) se réduisent à :

$$a_I = \int_{A_i\ A_j} \left(\frac{v^2}{E\ I} + \frac{1}{E\ S}\right) ds$$

(39) $$a_2 = \int_{A_i\ A_j} -\frac{x\ v}{E\ I}\ ds$$

$$a_3 = \int_{A_i\ A_j} \left(\frac{x^2}{E\ I} + \frac{1}{E\ S}\right)\ ds$$

Quelques valeurs de $\frac{G\Omega}{E\ S}$

Section	en Acier	Béton
Rectangle	0,33	0,36
Cercle	0,36	0,39
Losange	0,39	0,42

b) En général, on a :

$$A_{ij} \neq A_{ji}$$

$$t_{ij} \neq t_{ji}$$

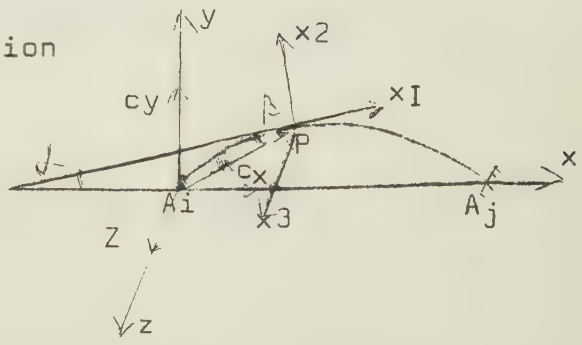
Mais le principe de réciprocité de Maxwell permet d'écrire comme dans le cas d'un élément droit :

$$B_{ij} = B_{ji}$$

C) ETUDE D'UN COUPLE CONTENU DANS LE PLAN x y

I) RESOLUTION DU PROBLEME

L'application en A_i d'un couple $\vec{c}\ (c_x, c_y)$ donne lieu en A_i à une réaction Z suivant l'axe (z).



Soit P un point de l'axe.

Posons :

$$r = A_i P$$

$$\alpha = \widehat{x, x_I}$$

$$\beta = \widehat{x_I, r}$$

Le moment de Z en P est $\left| M(Z) \right| = r\,Z$

Déterminons la valeur de Z par application du théorème de Castigliano. On a :

$$M_I = c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha + r\,Z \sin\beta$$

$$M_2 = -\,c_x \sin\alpha + c_y \cos\alpha - r\,Z \cos\beta$$

$$T_3 = Z$$

$$M_3 = N = T_2 = 0$$

L'énergie interne est d'après l'équation (I) :

$$W = \frac{1}{2} \int_{A_i\,A_j} \left(\frac{(M_I)^2}{G\,K} + \frac{(M_2)^2}{E\,I_2} + \frac{(T_3 - \frac{M_I}{R})^2}{G\,\Omega_3} \right) ds$$

Exprimons que A_i est fixe :

$$\frac{\delta W}{\delta Z} = \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{C_x \cos\alpha + C_y \sin\alpha + r Z \sin\beta}{G K} \right) r \sin\beta \right.$$

$$\left. - \frac{- C_x \sin\alpha + C_y \cos\alpha - r Z \cos\beta}{E I_2} r \cos\beta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{G \Omega_3} \left(Z - \frac{C_x \cos\alpha + C_y \sin\alpha + r Z \sin\beta}{R} \right) \left(1 - \frac{r \sin\beta}{R} \right) \right) ds = 0$$

ou

$$Z \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{(r \sin\beta)^2}{G K} + \frac{(r \cos\beta)^2}{E I_2} + \frac{I}{G \Omega_3} \left(1 - \frac{r \sin\beta}{R} \right) \right) \right) ds +$$

$$+ C_x \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{r \sin\beta \cos\alpha}{G K} + \frac{r \sin\alpha \cos\beta}{E I_2} - \frac{1}{G \Omega_3} \cdot \frac{\cos\alpha}{R} \right) \right.$$

$$\left. \left. \left(1 - \frac{r \sin\beta}{R} \right) \right) \right) ds +$$

$$+ C_y \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{r \sin\alpha \sin\beta}{G K} + \frac{r \cos\alpha \cos\beta}{E I_2} - \frac{1}{G \Omega_3} \cdot \frac{\sin\alpha}{R} \right) \right.$$

$$\left. \left. \left(1 - \frac{r \sin\beta}{R} \right) \right) \right) ds = 0$$

Cette équation peut être écrite sous la forme :

(40) $$Z = (\rho_i)_x \, c_x + (\rho_i)_y \, c_y$$

Le moment $\overrightarrow{\mu}$ qui apparaît en A_j a pour composantes :

(41) $$\mu_x = - c_x$$

$$\mu_y = - c_y + 1 \, Z = 1 \, (\rho_i)_x \, c_x + \left(1 \, (\rho_i)_y - 1 \right) c_y$$

Calculons en A_i la rotation $\overrightarrow{\theta_i}$: $(\theta_i)_x$, $(\theta_i)_y$.

a) Valeur de $(\theta_i)_x$:

De l'expression précédente de l'énergie W, on a :

$$(\theta_i)_x = \frac{\delta W}{\delta C_x} = \int_{A_i A_j} \left(\frac{c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha + r Z \sin\beta}{G K} \cos\alpha - \frac{- c_x \sin\alpha + c_y \cos\alpha - r Z \cos\beta}{E I_2} \sin\alpha \right) ds$$

$$= C_x \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{\cos^2\alpha}{G K} + \frac{\sin^2\alpha}{E I_2} + r (\rho_i)_x \left(\frac{\sin\beta \cos\alpha}{G K} + \frac{\cos\beta \sin\alpha}{E I_2} \right) \right) \right) ds$$

$$+ c_y \int_{A_i A_j} \left(\left(\frac{I}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{G K} - \frac{1}{E I_2} \right) + r (\rho_i)_y \left(\frac{\sin\beta \cos\alpha}{G K} + \frac{\sin\alpha \cos\beta}{E I_2} \right) \right) \right) ds$$

Ecrivons cette expression sous la forme :

$$(42) \qquad (\theta_i)_x = (d_i)_{xx} c_x + (d_i)_{xy} c_y$$

B) Valeur de $(\theta_i)_y$:

On a de même :

$$(\theta_i)_y = \frac{\delta W}{\delta c_y} = \int_{A_i A_j} \left(\frac{c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha + r Z \sin\beta}{G K} \sin\alpha + \frac{- c_x \sin\alpha + c_y \cos\alpha - r Z \cos\beta}{E I_2} \cos\alpha \right) ds$$

$$= c_x \int_{A_i A_j} \left(\frac{I}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{G K} - \frac{1}{E I_2} \right) + r (\rho_i)_x \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta}{G K} - \frac{\cos\alpha \cos\beta}{E I_2} \right) \right) ds$$

$$+ c_y \int_{A_i A_j} \left(\frac{\sin^2\alpha}{G K} + \frac{\cos^2\alpha}{E I_2} + r (\rho_i)_y \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta}{G K} - \frac{\cos\alpha \cos\beta}{E I_2} \right) \right) ds$$

Ecrivons cette équation sous la forme :

(43) $$(\theta_i)_y = (d_i)_{yx} c_x + (d_i)_{yy} c_y$$

c) Expressions de c_x et c_y :

Des équations (42) et (43), on peut exprimer c_x et c_y en fonction de $(\theta_i)_x$ et $(\theta_i)_y$. On trouve :

(44) $$c_x = (D_i)_{xx} (\theta_i)_x + (D_i)_{xy} (\theta_i)_y$$

$$c_y = (D_i)_{yx} (\theta_i)_x + (D_i)_{yy} (\theta_i)_y$$

où :

$$(D_i)_{xx} = \frac{(di)yy}{D} \qquad (D_i)_{xy} = -\frac{(di)xy}{D}$$

$$(D_i)_{yx} = -\frac{(di)yx}{D} \qquad (D_i)_{yy} = \frac{(di)xx}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} (di)_{xx} & (di)_{xy} \\ (di)_{yx} & (di)_{yy} \end{vmatrix}$$

d) Etude du noeud A_j

Identiquement à A_i, on peut déterminer aussi pour le noeud A_j les coefficients :

$$(D_j)_{xx}, (D_j)_{xy}, (D_j)_{yx} \text{ et } (D_j)_{yy}.$$

e) Remarque :

On constate que toutes les equations précédentes se simplifient énormément dans le cas de sections où $G\,K = E\,I_2$.
Ainsi, les (d_i) se réduisent à :

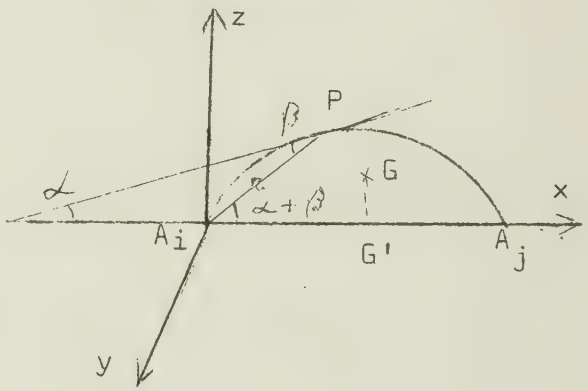
$$(d_i)_{xx} = \int_{A_i A_j} \left(1 + r\,(\rho_i)_x \sin(\alpha+\beta) \right) \frac{ds}{G\,K}$$

$$(d_i)_{xy} = \int_{A_i A_j} r\,(\rho_i)_y \sin(\alpha+\beta)\,\frac{ds}{G\,K}$$

$$(d_i)_{yx} = \int_{A_i A_j} r\,(\rho_i)_x \cos(\alpha+\beta)\,\frac{ds}{G\,K}$$

$$(d_i)_{yy} = \int_{A_i A_j} \left((1 + r\,(\rho_i)_y \cos(\alpha+\beta)) \right) \frac{ds}{G\,K}$$

Si en plus K est constante le long de l'arc $A_i\,A_j$, cas d'une section constante, les expressions précédentes s'écrivent :



$$(d_i)_{xx} = \frac{S_{ij}}{G\,K}\,(1 + (\rho_i)_x \cdot G\,G')$$

$$(d_i)_{xy} = \frac{S_{ij}}{G\,K}\,(\rho_i)_y \cdot G\,G'.$$

$$(d_i)_{yx} = \frac{S_{ij}}{G\,K}\,(\rho_i)_x \cdot A_i \cdot G'$$

$$(d_i)_{yy} = \frac{S_{ij}}{G\,K}\,\left(1 + (\rho_i)_y\ A_i\ G'\right)$$

où : S_{ij} : longueur de l'arc $A_i\,A_j$.

G : Centre de gravité de l'arc $A_i\,A_j$.

donne lieu en A_j à une rotation $\vec{\theta}_j \begin{pmatrix} (\theta_j)_x, & (\theta_j)_y \end{pmatrix}$ et il apparait en A_i un couple $\vec{\Gamma}' \begin{pmatrix} \Gamma'_x, & \Gamma'_y \end{pmatrix}$. Le principe de réciprocité de Maxwell permet d'écrire :

$$\vec{\Gamma}\,\vec{\theta}_j = \vec{\Gamma}' \cdot \vec{\theta}_i$$

ou :

$$(45) \qquad \Gamma_x \, (\theta_j)_x + \Gamma_y \, (\theta_j)_y = \Gamma'_x \, (\theta_i)_x + \Gamma'_y \, (\theta_i)_y$$

Considérons les cas suivants :

I) Les couples $\vec{c}$ et $\vec{c'}$ sont dirigés suivant (x) : c'est-à-dire :

$$c_y = c'_y = 0$$

En remplaçant dans l'équation (45) les termes par leurs valeurs à partir des équations (4I)et (44), on obtient :

$$\begin{pmatrix} (D_i)_{xx} \, (\theta_i)_x + (D_i)_{xy} \, (\theta_i)_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\theta_j)_x - 1 \, (\rho_i)_x \end{pmatrix} \quad (\theta_j)_y \quad = \quad \begin{pmatrix} (D_j)_{xx} \, (\theta_j)_x + (D_j)_{xy} \, (\theta_j)_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\theta_i)_x - 1 \, (\rho_j)_x \end{pmatrix} \quad (\theta_i)_y$$

Mais en remarquant que de la 2ème équation (44), on a :

$$(\theta_i)_y = - \frac{(D_i)_{yx}}{(D_i)_{yy}} \, (\theta_i)_x$$

et de même que :

$$(\theta_j)_y = - \frac{(D_j)_{yx}}{(D_j)_{yy}} \, (\theta_j)_x$$

l'expression précédente devient :

$$(46)\quad \left((D_i)_{xx} - (D_i)_{xy}\frac{(D_i)_{yx}}{(D_i)_{yy}}\right)\left(1 + 1(\rho_i)_x\frac{(D_j)_{yx}}{(D_j)_{yy}}\right) =$$

$$\left((D_j)_{xx} - (D_j)_{xy}\frac{(D_j)_{yx}}{(D_j)_{yy}}\right)\left(1 + 1(\rho_j)_x\frac{(D_i)_{yx}}{(D_i)_{yy}}\right)$$

2) Les couples $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{c'}$ sont dirigés suivant (y) c'est-à-dire : $c_x = c'_x = 0$

Comme précédemment, l'équation (45) devient :

$$\left(1(\rho_i)_y - 1\right)\left((D_i)_{yx}(\theta_i)_x + (D_i)_{yy}(\theta_i)_y\right)(\theta_j)_y =$$

$$\left(1(\rho_j)_y - 1\right)\left((D_j)_{yx}(\theta_j)_x + (D_j)_{yy}(\theta_j)_y\right)(\theta_i)_y$$

Cette expression devient en tenant compte de la Ière équation (44) :

$$(47)\quad \left(1(\rho_i)_y - 1\right)\left((D_i)_{yx}\frac{(D_i)_{xy}}{(D_i)_{xx}} - (D_i)_{yy}\right) =$$

$$\left(1(\rho_j)_y - 1\right)\left((D_j)_{yx}\frac{(D_j)_{xy}}{(D_j)_{xx}} - (D_j)_{yy}\right)$$

3) Le couple $\overrightarrow{c}$ est dirigé suivant (x) tandis que $\overrightarrow{c'}$ est dirigé suivant (y) :

c'est-à-dire : $c_y = c'_x = 0$

L'équation (45) s'écrit alors :

$$-\left((D_i)_{xx}(\theta_i)_x + (D_i)_{xy}(\theta_i)_y\right)\left((\theta_j)_x - 1(\rho_i)_x(\theta_j)_y\right) =$$

$$\left(1(\rho_j)_y - 1\right)\left((D_j)_{yx}(\theta_j)_x + (D_j)_{yy}(\theta_j)_y\right)(\theta_i)_y$$

Cette expression devient en tenant compte des équations (44)

$$(48)\quad \left((D_i)_{xx} - (D_i)_{xy}\,\frac{(D_i)_{yx}}{(D_i)_{yy}}\right)\left(1 + l(\varphi_i)_x\,\frac{(D_j)_{xx}}{(D_j)_{xy}}\right) =$$

$$\left(l(\varphi_j)_y - 1\right)\left((D_j)_{yx} - (D_j)_{yy}\,\frac{(D_j)_{xx}}{(D_j)_{xy}}\right)\cdot\frac{(D_i)_{yx}}{(D_i)_{yy}}$$

D) ETUDE DU DEPLACEMENT RELATIF $\overrightarrow{\Delta_{ij}}$ DES EXTREMITES

Un déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta_{ij}}$ $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ de A_i par rapport à A_j donne lieu à des moments dans celles-ci. Etudions l'effet de chaque composante à part.

a) Déplacement Δ_x.

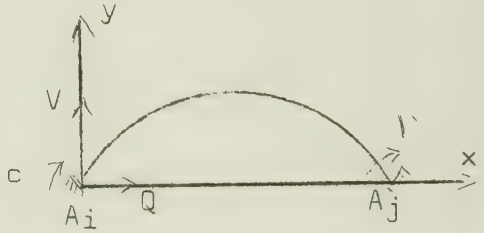
Un déplacement relatif Δx de l'extrémité A_i sans rotation donne lieu aux réactions Q, c, V qu'on se propose de déterminer.

En remarquant que le déplacement suivant (x) est Δx et suivant (y) il est nul et que la rotation (θ_i) est nulle, les équations (33) et (35) s'écrivent alors :

$$a_I\,Q + a_2\,V = b_I\,c + \Delta x$$

$$A_2\,Q + a_3\,V = b_2\,c$$

$$\int_{A_i\,A_j} \frac{c + V\,x - Q\,y}{E\,I}\,d\,s = 0$$



Les 2 premières équations donnent en tenant compte des équations (34) :

$$Q = \frac{(b_I\, c + \Delta x)\, a_3 - b_2\, a_2\, c}{a_I\, a_3 - (a_2)^2} = \lambda c + a_3 \frac{\Delta x}{a_I\, a_3 - (a_2)^2}$$

$$V = \frac{b_2\, a_I\, c - (b_I\, c + \Delta x)\, a_2}{a_I\, a_3 - (a_I)^2} = \gamma c - a_2 \frac{\Delta x}{a_I\, a_3 - (a_2)^2}$$

Remplaçons Q et V par leur valeur dans la 3ème équation. On trouve :

$$c \int_{A_i\, A_j} \frac{I + \gamma x - \lambda y}{E\, I}\, ds - \frac{\Delta x}{a_I\, a_3 - (a_2)^2} \int_{A_i\, A_j} (a_2\, x + a_3\, y) \frac{d\, s}{E\, I} = 0$$

Mais, des équations (33), on peut écrire :

$$\int_{A_i\, A_j} \frac{a_2\, x + a_3\, y}{E\, I}\, ds = - b_2\, a_2 + b_I\, a_3$$

Finalement, en tenant compte des équations (34) et (36), on a :

$$\frac{c}{A_{ij}} - \lambda \Delta x = 0$$

D'où :

(49) $$c = A_{ij} . \lambda \Delta x$$

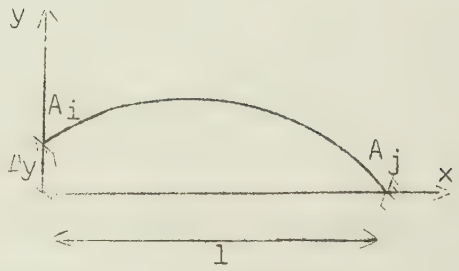
Le moment μ qui apparaît en A_j a une expression identique :

(50) $$\mu = A_{ji} (\lambda_j) \Delta x$$

Les moments c et μ sont parallèles à (z).

b) Déplacement (Δy).

Le déplacement (Δy) est équivalent à une rotation parallèle à (z) des deux extrémités et de valeur:



$$\theta_i = \theta_j = -\frac{\Delta y}{l} \qquad (51)$$

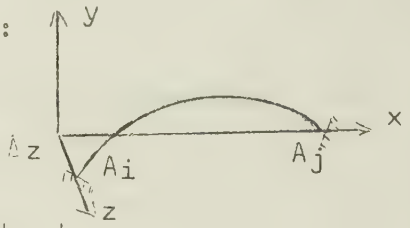
Les moments c et $\curvearrowright$ qui en résultent respectivement aux deux extrémités A_i et A_j sont donc à partir des équations (36) et (38) :

$$c = -(A_{ij} + B_{ij})\frac{\Delta y}{l} \qquad (52)$$

$$\curvearrowright = -(A_{ij} + B_{ij})\frac{\Delta y}{l} \qquad (53)$$

c) Déplacement (Δz).

Le déplacement Δz est équivalent à une rotation parallèle à (y) des deux extrémités et de valeur :



$$(\theta_i)_y = (\theta_j)_y = \frac{\Delta z}{l} \qquad (54)$$

Les moments c et $\curvearrowright$ qui en résultent respectivement aux deux extrémités A_i et A_j sont contenus dans le plan (x y).

La rotation $(\theta_i)_y$ fait apparaître les couples suivants :

- En (A_i) : Les équations (44) donnent :

$$(c_i)_x = (D_i)_{xy}\ (\theta_i)_y \qquad (55)$$

$$(c_i)_y = (D_i)_{yy}\ (\theta_i)_y \qquad (56)$$

- En (A_j) : Les équations (4I) donnent :

$$(57) \qquad \mathcal{M}_x = - (D_i)_{xy} (\theta_i)_y$$

$$(58) \qquad \mathcal{M}_y = \left(l(\rho_i)_x \right) (D_i)_{xy} + \left(l(\rho_i)_y - 1 \right) (D_i)_{yy} \Big) (\theta_i)_y$$

En conséquence, sous l'effet simultané des rotations $(\theta_i)_y$ et $(\theta_j)_y$ les moments qui apparaissent aux 2 extrémités, tout en tenant compte de l'équation (54), sont :

- En (A_i) :

$$(59) \quad (c_i)_x = \left((D_i)_{xy} - (D_j)_{xy} \right) \frac{\Delta z}{l}$$

$$(c_i)_y = \left((D_i)_{yy} + l(\rho_j)_x (D_j)_{xy} + \left(l(\rho_j)_y - 1 \right) (D_j)_{yy} \right) \frac{\Delta z}{l}$$

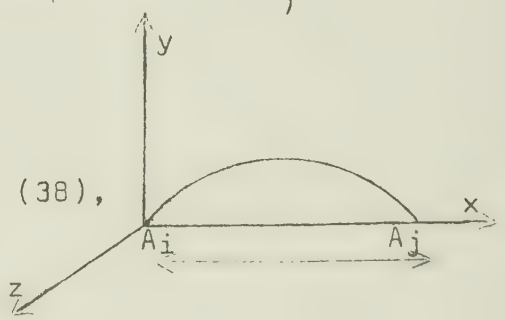
- En (A_j) :

On a les mêmes expressions que (59) où il suffit d'intervertir (i) et (j).

Dans le cas particulier où l'arc est symétrique, les équations (59) se réduisent à :

$$(60) \qquad (c_i)_x = 0$$

$$(c_i)_y = \left((\rho_j)_x (D_j)_{xy} + (\rho_j)_y (D_j)_{yy} \right) \Delta z$$



E) <u>EQUATIONS INTRINSEQUES</u>

A partir des équations (36), (38), (4I),(44),(49),(52), et (59), les équations intrinsèques de l'arc $A_i A_j$ s'écrivent :

$$(6I)\quad (M_{ij})_z = (m_{ij})_z + A_{ij}\,(\theta_i)_z + B_{ij}\,(\theta_j)_z + A_{ij}\,\lambda_i\,\Delta x - (A_{ij} + B_{ij})\,\frac{\Delta y}{l}$$

$$(M_{ij})_x = (m_{ij})_x + (D_i)_{xx}\,(\theta_i)_x + (D_i)_{xy}\,(\theta_i)_y - (D_j)_{xx}(\theta_j)_x - (D_j)_{xy}(\theta_j)_y + \left((D_i)_{xy} - (D_j)_{xy}\right)\frac{\Delta z}{l}$$

$$(M_{ij})_y = (m_{ij})_y + (D_i)_{yx}\,(\theta_i)_x + (D_i)_{yy}\,(\theta_i)_y + \left(1\,(\rho_j)_x + (D_j)_{xx} + \left(1\,(\rho_j)_y - 1\right)(D_j)_{yx}\right)(\theta_j)_x + \left(1\,(\rho_j)_x\,(D_j)_{xy} + \left(1\,(\rho_j)_y - 1\right)(D_j)_{yy}\right)(\theta_j)_y + \left((D_i)_{yy} + 1\,(\rho_j)_x\,(D_j)_{xy} + \left(1\,(\rho_j)_y - 1\right)(D_j)_{yy}\right)\frac{\Delta z}{l}$$

ou $\overrightarrow{m_{ij}}$: représente le moment d'encastrement parfait en A_i dans le cas où les extrémités A_i et A_j sont supposées encastrées.

En intervertissant (i) et (j) dans les expressions précédentes, on trouve les équations intrinsèques relatives au noeud A_j.

CHAPITRE IV

ETUDE DES SYSTEMES

A) CONSIDERATIONS PREALABLES

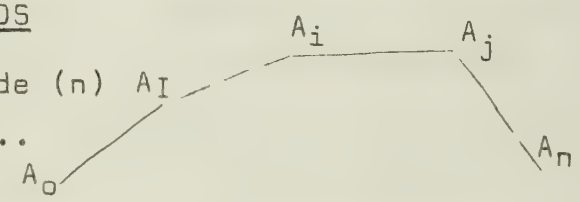
Nous considérons des systèmes formés d'éléments droits ou courbes de fibre moyenne plane. Les noeuds sont articulés ou à assemblage rigide. Les extrémités des éléments par lesquelles le système prend appui sont considérées comme noeuds du système.

On divise les systèmes en 2 catégories :

- Systèmes plans : Ce sont des systèmes formés par des éléments ayant les fibres moyennes contenues dans un même plan et sont soumis à des charges contenues dans ce plan et à des couples perpendiculaires à ce plan.
- Systèmes dans l'espace : Pour tout autre cas que précédemment, le système est dit dans l'espace.

B) DEPLACEMENT DES NOEUDS

Soit une succession de (n) éléments courbes ou droits A_o, A_I.. A_n. Si $\vec{\Delta}_{ij}$ est le déplacement relatif des deux extrémités de l'élément A_i A_j, le déplacement relatif des 2 noeuds extrêmes A_o et A_n est :



(62)

$$\overrightarrow{\Delta_{on}} = \sum \overrightarrow{\Delta_{ij}}$$

Le déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta}_{ij}$ est la résultante des 3 déplacements partiels suivants :

$\overrightarrow{\Delta_t}$: Allongement dû à la température (t)

(63) $$\overrightarrow{\Delta}_t = \int_{A_i\ A_j} \alpha t \ \overrightarrow{ds}$$

où : α = coefficient de dilatation linéaire de l'élément

t = température en un point de l'élément.

$\overrightarrow{\Delta_N}$: Allongement dû à l'effort normal (N)

(64) $$\overrightarrow{\Delta}_N = \int_{A_i\ A_j} \frac{N}{E\ S}\ \overrightarrow{ds}$$

$\overrightarrow{\Delta_g}$: Déplacement géométrique provenant de la mobilité des noeuds ou dû aux déplacements précédents. C'est ce déplacement qui donne lieu à un moment et qui intervient dans les équations intrinsèques.

C) DEGRE DE LIBERTE DE DEPLACEMENT

Considérons un système extrait aux effets de la température et des efforts normaux. Les déplacements que peuvent avoir ses noeuds dépendent uniquement de sa constitution même.

Le degré de liberté de déplacement de ce système est le nombre de déplacements indépendants que peuvent avoir ses noeuds.

Soit, dans un système quelconque, une cellule constituée d'une succession de n éléments $A_o, \ldots, A_n$ dont k sont droits et n - k courbes.

Le nombre de déplacements indépendants relatifs que peuvent avoir les noeuds de cette cellule est :

$$3\ (n - k) + 2\ k = 3\ n - k$$

Si le déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta}_{on}$ est connu, les différents déplacements $\overrightarrow{\Delta}_{ij}$ seront reliés par l'équation (62).

$$\overrightarrow{\Delta_{on}} = \overrightarrow{\Sigma \Delta_{ij}}$$

Le degré de liberté (δ) de cette cellule se réduit à :

$$\delta = 3 (n - 1) - k \tag{65}$$

Supposons que le système soit formé de C cellules telle que la cellule A_o, ..., A_n dont le déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta}_{on}$ des deux noeuds extrêmes est soit connu soit décompté dans une autre cellule. Le degré de liberté D du système est alors:

$$D = \Sigma \delta = 3 \Sigma (n - 1) - \Sigma k$$

$$= 3 (N - C) - K \tag{66}$$

où : $N = \Sigma n$: nombre total d'éléments droits ou courbes,

C : nombre total des cellules élémentaires.

K : nombre total d'éléments droits du système.

Si le système est constitué uniquement d'éléments droits, on a alors :

$N = K$ et l'équation (66) devient :

$$D = 2 N - 3 C \tag{67}$$

Pour un système plan, les équations (66) et (67) se réduisent respectivement à :

$$D = 2 (N - C) - K$$

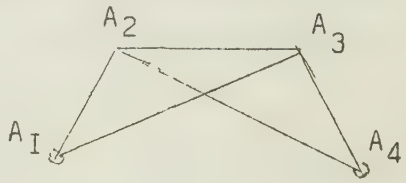
$$D = N - 2 C \tag{68}$$

Il est à remarquer que K représente le nombre des éléments droits non compris les éléments surabondants.

Un élément est dit surabondant s'il relie deux noeuds qui sont de nature relativement fixes. Ainsi, dans le système plan $A_I\ A_2\ A_3\ A_4$ une des deux barres $A_I\ A_4$ ou bien $A_2\ A_3$ est surabondante.

Si dans un système, on a :

$$D = 0$$



le système est dit à noeuds fixes.

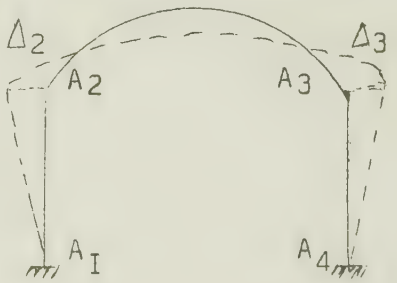
Si l'on a :

$$D \neq 0$$

le système est dit à noeuds mobiles, c'est-à-dire : si le système était à noeuds articulés, il aurait été nécessaire, pour s'opposer à son écroulement, de prévoir D appuis simples supplémentaires à des noeuds A_i judicieusement choisis. Ces appuis ne seraient donc pas surabondants et il aurait été possible, en conséquence, de déterminer leurs réactions; c'est-à-dire déterminer la résultante des efforts (tranchants et normaux) à l'extrémité A_i des différents éléments aboutissant à ce noeud. La rigidité des noeuds A_k du système tient lieu, en quelque sorte, de ces D appuis fictifs. Il est donc possible de déterminer la résultante $\overrightarrow{R_i}$ des efforts à l'extrémité A_i des éléments aboutissant à ce noeud en fonction des moments $\overrightarrow{M_{kl}}$ et des charges extérieures $\overrightarrow{P}$. L'équilibre du noeud A_i permet d'écrire :

$$\overrightarrow{R_i}\ (\overrightarrow{M_{kl}}, \overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\Sigma F_i} = 0 \qquad (69)$$

où $\overrightarrow{\Sigma F_i}$ représente la résultante des charges $\overrightarrow{F_i}$ appliquées directement sur A_i.



Exemple :

Soit le portique $A_I\ A_2\ A_3\ A_4$ Déterminons son degré de liberté D par application de l'équation (66) où l'on a :

$$N = 3$$
$$C = 1$$
$$K = 2$$

D'où : D = 4 déplacements indépendants. Si les déplacements sont contenus dans le plan du portique, le degré de liberté D sera déterminé par l'équation (68) qui donne :

D = 2 déplacements indépendants (Δ_2 et Δ_3)

D) RESOLUTIONS DES SYSTEMES.

La résolution d'un système consiste à déterminer les moments $\overrightarrow{M_{ij}}$ aux extrémités des différents éléments. Le problème revient donc à déterminer les déformations aux extrémités des éléments (rotations et déplacements relatifs) qui, par l'intermédiaire des équations intrinsèques, permettent de calculer les moments $\overrightarrow{M_{ij}}$. Ainsi, les déformations aux extrémités des éléments constituent les inconnues du problème. Le nombre L de ces inconnues est :

(70) $$L = 3F + D$$

où : F : Nombre de noeuds du système non encastrés. Ils admettent 3 F rotations.

D : Degré de liberté du système. Il lui correspond D déplacements indépendants.

Il y a donc lieu d'établir L équations indépendantes entre les L déformations du système. Ces L équations peuvent être obtenues en exprimant l'équilibre des F noeuds A_i du système:

- Equilibre des moments :

(71) $$\sum_j \overrightarrow{M_{ij}} = 0$$

Cette relation interprète la liberté de rotation du noeud A_i. Exprimée en fonction des déformations, elle permet d'écrire, en général, 3 équations indépendantes. Pour les F noeuds, on a donc 3 F relations indépendantes.

- Equilibre des forces :

De l'équation (69), on a :

$$\vec{R}_i\ (\vec{M}_{kl},\ \vec{P}) + \vec{\leqslant} \vec{F}_i = 0 \qquad (72)$$

Cette relation interprète la liberté de déplacement du noeud mobile A_i. Exprimée en fonction des déformations, par l'intermédiaire de $\vec{M}_{kl}$, elle donne D équations indépendantes pour les D déplacements indépendants. Elle est de forme linéaire.

Ainsi, on a : $L = 3F + D$ équations pour les L déformations indépendantes.

E) RESOLUTION D'UN SYSTEME PLAN.

Dans un problème plan, l'expression (7I) ne donne qu'une équation et l'expression (7O) se réduit à :

$$L = F + D \qquad (73)$$

Pour la résolution d'un système plan, on peut utiliser les 2 méthodes suivantes :

I) Première méthode : Calcul des déformations.

Les équations (7I) et (72) donnent un système de L équations linéaires en fonction des L déformations ($\vec{\theta}_i$ et $\vec{\Delta}_{ij}$). Ce système d'équations linéaires se prête à la résolution par approximations successives.

II) Deuxième méthode : Méthode de Cross simplifiée.

Elle permet la détermination directe des moments sans passer par les déformations. La méthode initiale bien connue de Cross s'effectue en 3 phases :

- Ière phase : On prévoit D appuis supplémentaires pour rendre le système à noeuds fixes. Puis, on calcule les moments sous l'action des charges.

- 2ème phase : On décharge le système et on calcule séparément les moments dans le système sous l'action des réactions des D appuis supplémentaires considérées comme forces extérieures.

- 3ème phase : Par la combinaison des 2 phases précédentes, on déduit les moments définitifs dans le système.

Dans les 2 premières phases, le calcul des moments s'effectue en opérant des cycles de relaxation et de fixation successivement des noeuds du système au point de vue rotation.

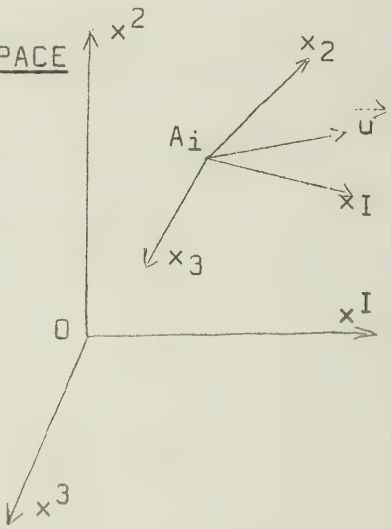
La simplification de la méthode de Cross consiste à opérer par des cycles de relaxation et de fixation alternatifs au point de vue rotation et déplacement. Ainsi, on obtient directement les moments définitifs en une seule phase.

F) RESOLUTION D'UN SYSTEME DANS L'ESPACE

I) Equation générale :

Soit le trièdre $(x^I\ x^2\ x^3)$ par rapport auquel le système est étudié.

Considérons un élément aboutissant au noeud A_i et admettant (A_i, x_I, x_2, x_3) comme trièdre de référence.



$\alpha_p^{\ 1}$ est le cosinus directeur relatif aux 2 axes x_p et x^1. On a évidemment $\alpha_p^{\ 1} = \alpha_1^{\ p}$.

Considérons une déformation (déplacement ou rotation) du noeud A_i représentée par un vecteur $\overrightarrow{u}$. On a :

$$u_p = \sum_l \alpha_p^l \, u^l \qquad (74)$$

où : u_k et u^l sont respectivement les projections de $\overrightarrow{u}$ sur les 2 axes x_p et x^l.

A la déformation $\overrightarrow{u}$ correspond dans l'élément considéré un moment $\overrightarrow{v}$. On a, en tenant compte de (74) :

$$v_m = \sum_p k_{mp} \, u_p = \sum_p \sum_l k_{mp} \, \alpha_k^l \, u^l \qquad (75)$$

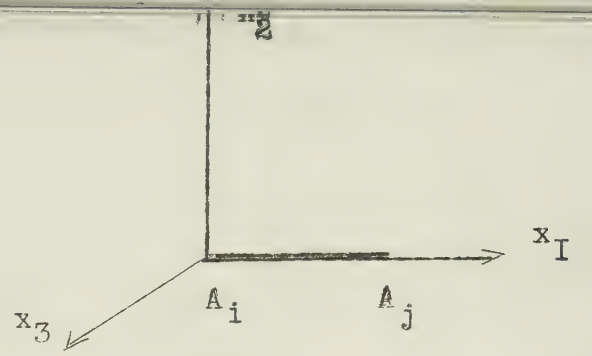
où : k_{mp} est un coefficient caractéristique de l'élément et défini par les équations intrinsèques (22) et (6I). Les valeurs de k_{mp} sont données dans le tableau annexe.

Finalement, la composante v^q du moment $\overrightarrow{v}$ suivant l'axe x^q est donnée par :

$$v^q = \sum_m \alpha_m^q \, v_m = \sum_m \sum_p \sum_l \alpha_m^q \, \alpha_k^l \, k_{mp} \, u^l \qquad (76)$$

ELEMENT DROIT

TABLEAU ANNEXE de k_{mp}



$\vec{u}$	$\vec{M}_{ij} = \vec{v}$		
	$(M_{ij})_1$	$(M_{ij})_2$	$(M_{ij})_3$
$(\vec{\theta_i})$: $(\theta_i)_1$	K_{ij}	0	0
$(\theta_i)_2$	0	$(A_{ij})_2$	0
$(\theta_i)_3$	0	0	$(A_{ij})_3$
(θ_j) : $(\theta_j)_I$	$-K_{ij}$	0	0
$(\theta_j)_2$	0	$(B_{ij})_2$	0
$(\theta_j)_3$	0	0	$(B_{ij})_3$
$\vec{\Delta}_{ij}$: $(\Delta_{ij})_2$	0	0	$-(A_{ij} + B_{ij})_3$
$(\Delta_{ij})_3$	0	$-(A_{ij} + B_{ij})_2$	0

ELEMENT COURBE

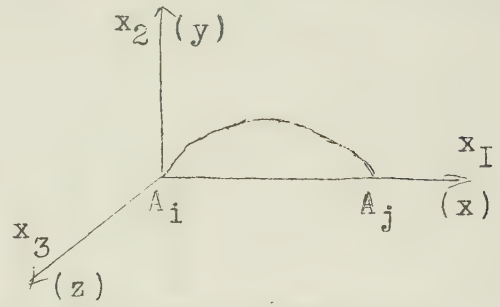


TABLEAU ANNEXE de k_{mp}

$\vec{u}$	$\overrightarrow{M_{ij}} = \vec{v}$		
	$(M_{ij})_x$	$(M_{ij})_y$	$(M_{ij})_z$
$(\vec{\theta_i})$: $(\theta_i)_x$	$(D_i)_{xx}$	$(D_i)_{yx}$	0
$(\theta_i)_y$	$(D_i)_{xy}$	$(D_i)_{yy}$	0
$(\theta_i)_z$	0	0	λ_{ij}
$(\vec{\theta_j})$: $(\theta_j)_x$	$-(D_j)_{xx}$	$1(\rho_j)_x (D_j)_{xx} + [1(\rho_j)_y - 1](D_j)_y$	0
$(\theta_j)_y$	$-(D_j)_{xy}$	$1(\rho_j)_x (D_j)_{xy} + [1(\rho_j)_y - 1](D_j)_{yy}$	0
$(\theta_j)_z$	0	0	B_{ij}
$(\vec{\Delta_{ij}})$: $(\Delta_{ij})_x$	0	0	$A_{ij} \cdot \lambda_i$
$(\Delta_{ij})_y$	0	0	$-\frac{1}{l}(A_{ij} + B_{ij})$
$(\Delta_{ij})_z$	$\frac{1}{l}[(D_i)_{xy} - (D_j)_{xy}]$	$\frac{1}{l}[(D_i)_{yy} + 1(\rho_j)_x (D_j)_{xy} + [1(\rho_j)_y - 1](D_j)_{yy}]$	0

II) Méthode de résolution

La méthode de résolution des systèmes dans l'espace consiste à calculer les déformations et à déterminer en conséquence les moments à partir des équations intrinsèques. Elle constitue une généralisation de la Ière méthode de résolution des systèmes plans.

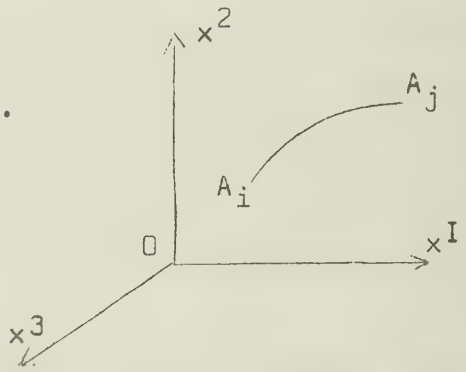
Nous avons vu que le nombre total d'inconnues est, de l'équation (70) :

$$L = 3F + 0$$

Les (L) équations indépendantes nécessaires sont obtenues à partir de :

- Equilibre des moments :

Considérons l'élément $A_i A_j$. Le moment $\overrightarrow{M_{ij}}$ a une composante suivant l'axe x^q de la forme (76) :



$$v^q = \sum_m \sum_p \sum_l \alpha_m^q \alpha_k^l k_{mp} u^l$$

L'équilibre des moments à ce noeud A_i est exprimé par l'équation (7I) :

$$\Sigma \overrightarrow{M_{ij}} = 0$$

La projection de cette expression suivant l'axe x^q donne l'expression suivante étendue à tous les éléments aboutissant à A_i :

(77) $$\Sigma v^q = 0$$

Nous avons ainsi 3 F équations (q = I, 2, 3) pour les F noeuds du système exprimées en fonction des projections des déformations (u^l) suivant les 3 axes de référence x^q.

- Equilibre des forces.

L'équilibre des forces au noeud A_i est exprimé par la relation (72) :

$$\vec{R}_i\ (\vec{M}_{kl},\ \vec{P}) + \sum \vec{F}_i = 0$$

Cette relation exprimée en fonction des déformations par l'intermédiaire de $\vec{M}_{kl}$, donne D équations indépendantes pour les D déplacements indépendants.

<u>En définitive</u> : Pour les (L) inconnues, nous avons L équations linéaires indépendantes.

En général, les systèmes dans l'espace comprennent un nombre élevé d'inconnues. La méthode décrite présente l'avantage de transformer le problème en la résolution d'un système d'équations linéaires qui se prête à la résolution par approximations successives. En plus, elle présente l'avantage, dans le cas d'un nombre très élevé d'inconnues, de se prêter aisément au calcul par les machines électroniques.

La généralisation de la 2ème méthode de résolution des systèmes plans est possible aussi. Mais, en particulier si le système contient des arcs, elle donne lieu à une méthode assez compliquée. Une erreur numérique commise au cours d'une opération de relaxation ne s'élimine pas dans les opérations suivantes. On ne s'en rend compte qu'à la fin des opérations. Par contre, la résolution du système d'équations linéaires par approximations successives ne présente pas cet inconvénient. Une erreur numérique commise au cours d'une opération d'approximation se rectifie d'elle-même dans les opérations suivantes.

G) SYSTEMES PARTICULIERS

I) SYSTEMES SYMETRIQUES

Nous considérons des systèmes admettant un ou plusieurs plans de symétrie. Pour un système plan, le plan de symétrie se réduit à un axe. Nous considérons les cas de charges suivants :

a) Les charges sont symétriques :

Deux noeuds A_i et A_j symétriques ont :

- Les rotations $\vec{\theta}_i$ et $\vec{\theta}_j$ antisymétriques,
- Les déplacements $\vec{\Delta}_i$ et $\vec{\Delta}_j$ symétriques.

Un noeud A_i se trouvant dans le plan de symétrie a :

- Une rotation $\vec{\theta}_i$ perpendiculaire au plan,
- Un déplacement $\vec{\Delta}_i$ contenu dans le plan.

b) Les charges sont antisymétriques :

Deux noeuds A_i et A_j symétriques ont :

- Les rotations $\vec{\theta}_i$ et $\vec{\theta}_j$ symétriques,
- Les déplacements $\vec{\Delta}_i$ et $\vec{\Delta}_j$ antisymétriques.

Un noeud A_i se trouvant dans le plan de symétrie a :

- Une rotation $\vec{\theta}_i$ contenue dans le plan
- Un déplacement $\vec{\Delta}_i$ perpendiculaire au plan.

L'étude de ces deux systèmes est donc réduite de moitié pratiquement.

c) Les charges sont quelconques :

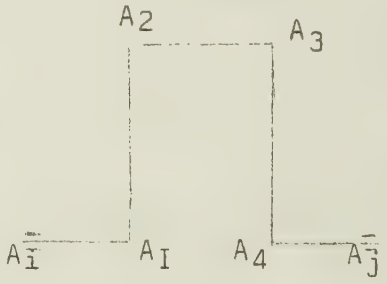
Toute répartition de charges peut être obtenue par la superposition des 2 cas précédents.

II) SYSTEMES CONSTITUES DE CELLULES IDENTIQUES

Considérons un système constitué d'un grand nombre de cellules identiques rattachée chacune à l'ensemble du système par n noeuds. Il est possible d'établir au préalable des équations identiques aux équations intrinsèques donnant le moment à chacune des extrémités des éléments de cette cellule aboutissant à un de ces n noeuds en fonction des déformations des n noeuds uniquement. De cette façon, il n'est pas nécessaire de tenir compte des déformations des noeuds constituant la cellule. Donc, la résolution se trouve simplifiée.

Cette simplification devient intéressante si l'on a à traiter plusieurs systèmes contenant des cellules identiques.

Considérons, par exemple, un vilbrequin constitué de N coudes tel que $A_i\ A_I\ A_2\ A_3\ A_4\ A_j$. Il est possible d'exprimer les moments en A_i et A_j en fonction uniquement des déformations de ces 2 noeuds sans faire intervenir celles des autres noeuds $A_I,\ldots,A_4$.



Dans ce cas, le nombre total des inconnues par coude est :

- Rotations : Il y a 5 noeuds. D'où 3 F = 3 x 5 = I5
- Déplacements indépendants : De l'équation (67) :

$$D = 2N - 3C$$

où N = 5 éléments droits

C = I cellule

D = 2 x 5 - 3 = 7 déplacements indépendants.

Le nombre total des inconnues est donc :

$$L = I5 + 7 = 22 \text{ inconnues.}$$

Par contre, en écrivant les moments en A_i et A_j en fonction des rotations de ces noeuds uniquement, le nombre d'inconnues sera réduit par coude à :

$$L = 2 \times 3 = 6 \text{ rotations inconnues.}$$

H) REMARQUES GENERALES

L'effort normal N intervient dans la résolution d'un système sous les 2 formes suivantes :

- Dans l'expression des coefficients figurant dans les équations intrinsèques.
- Dans l'expression des déplacements (62) par l'intermédiaire de $\overrightarrow{\Delta}_N$ (équation (64).

Or, à priori, la valeur de N n'est pas, en général, connue. En ce cas, il y a lieu de procéder par approximations successives consistant en :

a) Résoudre le problème sans tenir compte de l'effort normal.

b) Déterminer en conséquence les efforts normaux N dans les différents éléments.

c) Si l'on juge utile, on recommence la résolution du problème tout en tenant compte de N.

Il est parfois possible d'avoir exactement la valeur de N ou une valeur approchée. Soit, par exemple, un système à noeuds fixes. Il est bien connu que les valeurs de N calculées pour les différents éléments dans un système auxiliaire déduit du précédent en rendant tous les noeuds articulés constituent une première approximation de la valeur réelle de N dans les différents éléments du système réel à noeuds fixes.

CHAPITRE V

ANALOGIE ELECTRIQUE

A) CONSIDERATIONS PREALABLES -

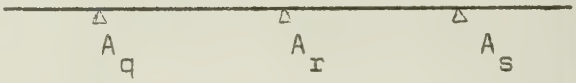
Des études ont été faites pour résoudre des systèmes plans à éléments droits de section constante par analogie électrique.

Le but de ce chapitre est d'étendre certains résultats au cas de systèmes plans formés d'éléments droits ou courbes de section variable tout en tenant compte des effets des efforts tranchants (T) et normaux (N) et de préciser la condition d'applicabilité de cette méthode.

B) THEOREME des 3 MOMENTS -

I) Equation générale

Soit une poutre continue sur plusieurs appuis simples A_i.



Reprenons les équations intrinsèques (22) :

$$M_{ij} = m_{ij} + A_{ij}\,\theta_i + B_{ij}\,\theta_j - (A_{ij} + B_{ij})\,\frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}$$

$$M_{ji} = m_{ji} + A_{ji}\,\theta_j + B_{ij}\,\theta_i - (A_{ji} + B_{ij})\,\frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}$$

où : Δ_{ij} représente le tassement relatif de 2 appuis consécutifs A_i et A_j.

De ces 2 équations, on tire :

$$M_{ij} - t_{ji} M_{ji} = m_{ij} - t_{ji} m_{ji} + (A_{ij} - t_{ji} B_{ij}) \theta_i - (A_{ij} - t_{ji} B_{ij}) \frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}$$

$$= m_{ij} - t_{ji} m_{ji} + A_{ij} \left(1 - (t_{ji})^2\right) \left(\theta_i - \frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}\right)$$

$$M_{ji} - t_{ij} M_{ij} = m_{ji} - t_{ij} m_{ij} + A_{ji} \left(1 - (t_{ij})^2\right) \left(\theta_j - \frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}\right)$$

En conséquence, on peut écrire qu'à l'appui A_r on a :

$$M_{rq} - t_{qr} M_{qr} = m_{rq} - t_{qr} m_{qr} + A_{rq} \left(1 - (t_{qr})^2\right) \left(\theta_r - \frac{\Delta_{qr}}{l_{qr}}\right)$$

$$M_{rs} - t_{sr} M_{sr} = m_{rs} - t_{sr} m_{sr} + A_{rs} \left(1 - (t_{sr})^2\right) \left(\theta_r - \frac{\Delta_{rs}}{l_{rs}}\right)$$

Eliminons θ_r entre ces 2 équations. On trouve :

$$\frac{M_{rq} - t_{qr} M_{qr}}{A_{rq}\left(1 - (t_{qr})^2\right)} - \frac{M_{rs} - t_{sr} M_{sr}}{A_{rs}\left(1 - (t_{sr})^2\right)} = \frac{m_{rq} - t_{qr} m_{qr}}{A_{rq}\left(1 - (t_{qr})^2\right)}$$

$$- \frac{m_{rs} - t_{sr} m_{sr}}{A_{rs}\left(1 - (t_{sr})^2\right)} + \frac{\Delta_{rs}}{l_{rs}} - \frac{\Delta_{qr}}{l_{qr}}$$

Appelons M_i le moment de flexion à l'appui A_i.

On aura ainsi :

$$M_q = M_{qr}$$

$$M_r = M_{rs} = - M_{rq}$$

$$M_s = - M_{sr}$$

L'équation précédente s'écrit donc en appelant (- U) le 2ème membre :

$$(80)\quad \frac{t_{qr}\,M_q}{A_{rq}\left(1-(t_{qr})^2\right)} + M_r\left(\frac{1}{A_{rq}\left(1-(t_{qr})^2\right)} + \frac{1}{A_{rs}\left(1-(t_{sr})^2\right)}\right) + \frac{t_{sr}\,M_s}{A_{rs}\left(1-(t_{sr})^2\right)} = U$$

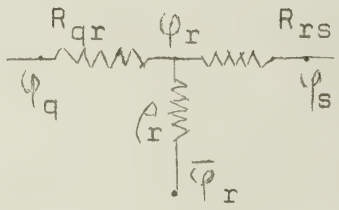
C'est l'expression générale du théorème des 3 moments où A_{ij} et t_{ij} comprennent implicitement les effets de N et T. Dans les cas ordinaires, les travées A_i A_j sont à section constante et N = 0. Dans ces conditions, les équations (3I) donnent :

$$A_{ij} = A_{ji} = \left(\frac{l^2 + 3EI/G\Omega}{l^2 + 12EI/G\Omega} \cdot \frac{4EI}{l}\right)_{ij}$$

$$t_{ij} = t_{ji} = \left(\frac{l^2 - 6EI/G\Omega}{2l^2 + 6EI/G\Omega}\right)_{ij}$$

II) Analogie Electrique

Soit le montage électrique ci-contre où les φ représentent des potentiels et R et ρ des résistances.



L'équation de Kirchoff du noeud (r) est :

$$\frac{\varphi_r - \varphi_q}{R_{qr}} + \frac{\varphi_r - \varphi_s}{R_{rs}} + \frac{\varphi_r - \bar{\varphi}_r}{\rho_r} = 0$$

ou :

$$(8I)\quad -\frac{\varphi_q}{R_{qr}} + \varphi_r\left(\frac{1}{R_{qr}} + \frac{1}{R_{rs}} + \frac{1}{\rho_r}\right) - \frac{\varphi_s}{R_{rs}} = \frac{\bar{\varphi}_r}{\rho_r}$$

En comparant ces 2 équations (80) et (8I), on constate qu'elles s'identifient en prenant :

(82)
$$\frac{1}{R_{qr}} = -\frac{t_{qr}}{A_{rq}\left(1 - (t_{qr})^2\right)}$$

$$\frac{1}{R_{rs}} = -\frac{t_{sr}}{A_{rs}\left(1 - (t_{sr})^2\right)}$$

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{t_{qr} + 1}{A_{rq}\left(1 - (t_{qr})^2\right)} + \frac{t_{sr} + 1}{A_{rs}\left(1 - (t_{sr})^2\right)}$$

$$= \frac{1}{A_{rq}(1 - t_{qr})} + \frac{1}{A_{rs}(1 - t_{sr})}$$

$$\overline{\varphi_r} = \rho_r \, U$$

En conséquence, les φ_i représentent les moments de flexion M_i.

Donc, pour résoudre par analogie électrique une poutre sur plusieurs appuis simples, on remplace chaque travée $A_q A_r$ par la résistance R_{qr} et on alimente chaque appui A_r par le potentiel $\overline{\varphi_r}$ à travers la résistance ρ_r. Les valeurs de R_{qr}, ρ_r et $\overline{\varphi_r}$ sont convenablement choisis à partir des expressions précédentes. La mesure des φ_r aux différents appuis donne donc la valeur des moments de flexion M_r en ces points.

Aux appuis simples extrêmes, on a :

$$M_i = \varphi_i = 0$$

III) Cas particulier

Considérons une poutre à section constante et où l'on néglige l'effet de l'effort tranchant.

On a alors :

$$A_{ij} = A_{ji} = \left(\frac{4\ E\ I}{l}\right)_{ij}$$

$$t_{ij} = t_{ji} = 0{,}5$$

En portant ces valeurs dans l'équation (80), on retrouve l'équation bien connue des 3 moments:

$$(83)\quad \frac{M_q}{(E\ I\ /\ l)_{qr}} + 2\ M_r\left(\frac{1}{(E\ I\ /\ l)_{qr}} + \frac{1}{(E\ I\ /l)_{rs}}\right) + \frac{M_s}{(E\ I\ /\ l)_{rs}} = 6\ U$$

Les équations (82) se trouvent simplifiées en conséquence.

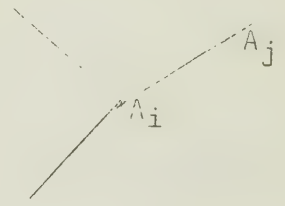
C) - ETUDE DES SYSTEMES PLANS A NOEUDS FIXES

I) Equation générale

Soit un système plan à noeuds fixes formé d'éléments droits ou courbes. Dans ce cas, les équations intrinsèques (22) et (6I) de ces 2 types d'éléments sont identiques et s'écrivent pour un élément $A_i\ A_j$:

$$M_{ij} = m_{ij} + A_{ij}\ \theta_j + B_{ij}\ \theta_j$$

$$M_{ji} = m_{ji} + A_{ji}\ \theta_j + B_{ij}\ \theta_i$$



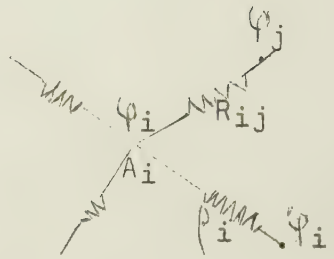
L'équilibre des moments au noeud A_i s'exprime par la relation (7I) :

$$\sum_j M_{ij} = 0$$

ou : (84) $$\sum_j m_{ij} + \theta_i \sum_j A_{ij} + \sum_j B_{ij}\,\theta_j = 0$$

II) Analogie électrique

Dans le montage électrique ci-contre, l'équation de Kirchoff du noeud électrique A_i est :



$$\frac{\varphi_i - \bar{\varphi}_i}{\rho_i} + \sum_j \frac{\varphi_i - \varphi_j}{R_{ij}} = 0$$

ou :

(85) $$-\frac{\bar{\varphi}_i}{\rho_i} + \varphi_i \left(\frac{1}{\rho_i} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}\right) - \sum_j \frac{\varphi_i}{R_{ij}} = 0$$

En comparant ces 2 équations (84) et (85), on remarque qu'elles s'identifient en prenant :

(86) $$\frac{1}{R_{ij}} = -B_{ij}$$

$$\frac{1}{\rho_i} = \sum_j (A_{ij} + B_{ij}) = \sum_j A_{ij}\,(1 + t_{ij})$$

$$\bar{\varphi}_i = -\frac{\sum_j m_{ij}}{\sum_j A_{ij}\,(1 + t_{ij})}$$

En conséquence, les φ_i représentent la rotation θ_i en A_i.

Donc, pour résoudre par analogie électrique un système plan à noeuds fixes, on remplace chaque élément $A_i\ A_j$ par la résistance R_{ij} et on alimente chaque noeud A_i par le potentiel φ_i à travers la résistance ρ_i. Les valeurs de R_{ij}, ρ_i et φ_i sont convenablement choisis à partir des expressions précédentes. La mesure des φ_i aux différents noeuds donne donc la valeur des rotations θ_i en ces noeuds.

Si le noeud A_i est encastré, on a :

$$\theta_i = \varphi_i = 0$$

D) CONDITION D'APPLICABILITE DE L'ANALOGIE ELECTRIQUE

De ce qui précède, on constate que :

- De l'étude du théorème des 3 moments, les résistances électriques R_{ij} s'identifient à des rigidités A_{ij} d'après les équations (82).
- De l'étude des systèmes plans, les résistances électriques R_{ij} s'identifient à l'inverse des rigidités $\frac{1}{A_{ij}}$ d'après les équations (86).

Or, dans un circuit électrique, on a évidemment $R_{ij} = R_{ji}$. Par contre, on a, en général, pour les rigidités $A_{ij} \neq A_{ji}$. Donc la condition pour que la méthode de résolution par analogie électrique soit applicable est que l'on ait :

(87) $$A_{ij} = A_{ji}$$

ou $$t_{ij} = t_{ji}$$

car on a toujours :

car on a toujours :

$$B_{ij} = B_{ji} = t_{ij} A_{ij} = t_{ji} A_{ji}$$

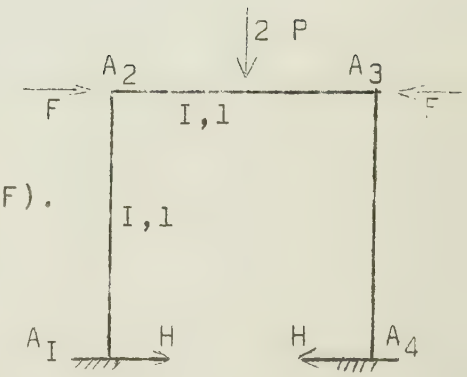
C'est le cas, par exemple, des éléments symétriques ou à section constante.

N.B.- Le développement de cette méthode de résolution par analogie électrique et l'étude du montage électrique nécessaire sont entrepris sous la direction de Monsieur Siestrunck du Laboratoire de Mécanique Physique de la Faculté des Sciences de PARIS.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS DIVERSES

A) ETUDE D'UN PORTIQUE



Le portique $A_I\ A_2\ A_3\ A_4$ est symétrique et symétriquement chargé (2 P et F). Les 3 éléments droits sont parfaitement identiques (I, 1)

RESOLUTION :

Des équations intrinsèques (22) on a :

$$M_{23} = m_{23} + A_{23}\,\theta_2 + B_{23}\,\theta_3$$

$$= m_{23} + (A_{23} - B_{23})\,\theta_2 \qquad (\theta_2 = -\theta_3)$$

$$M_{2I} = A_{2I}\,\theta_2$$

La rotation θ_2 peut être déterminée en exprimant l'équilibre du noeud A_2 :

$$M_{2I} + M_{23} = m_{23} + (A_{23} - B_{23} + A_{2I})\,\theta_2 = 0$$

et $$\theta_2 = -\frac{1}{A_{23} - B_{23} + A_{2I}}\ m_{23}$$

D'où $$M_{23} = -M_{2I} = \frac{A_{2I}}{A_{23} - B_{23} + A_{2I}}\ m_{23}$$

Considérons les 2 cas suivants :

a) On ne tient pas compte de l'effet de l'effort normal :

On a alors :

$$A_{ij} = 2 B_{ij} = \frac{4 E I}{l}$$

$$m_{23} = - \frac{P l}{4}$$

D'où $$M_{2I} = 0,I67 P l$$

$$M_{I2} = 0,083 P l$$

La réaction horizontale H est donnée par :

$$M_{2I} + M_{I2} - H l = 0$$

D'où $$H = \frac{M_{I2} + M_{2I}}{l}$$

b) On tient compte de l'effet de l'effort normal :

Supposons que l'effort normal N est le même dans tous les éléments et égal à :

$$N = P = F + H = \frac{N_c}{3} \qquad \text{où } N_c = E I \left(\frac{\Pi}{l}\right)^2$$

L'expression précédente de M_{23} peut s'écrire en posant :

$$t = \frac{B_{ij}}{A_{ij}} :$$

$$M_{23} = \frac{m_{23}}{2 - t}$$

- Valeur de m_{23} :

Le moment d'encastrement parfait m_{23} est donnée par l'équation (I2 bis) :

$$m_{23} = - \frac{P l}{w l} \operatorname{tg} \frac{w l}{4}$$

où $(w)^2 = \frac{N}{E\,I} = \frac{1}{3}\left(\frac{\Pi}{1}\right)^2$

$(w1) = \frac{\Pi}{\sqrt{3}} = 1{,}814 \qquad \frac{w1}{4} = 0{,}4535 \simeq 26°$

Finalement :

$$m_{23} = -0{,}269\ P\ 1$$

De l'équation (28), on a :

$$t = \frac{w\,1 - \sin w\,1}{\sin w\,1 - w\,1 \cos w\,1} = 0{,}599$$

D'où :

$$M_{23} = 0{,}192\ P\ 1$$

$$M_{12} = t \times M_{23} = 0{,}115\ P\ 1$$

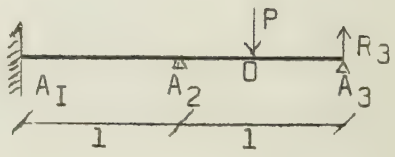
Donc, les erreurs relatives commises en négligeant l'effet de l'effort normal sont :

Pour M_{23} : $e = \frac{0{,}192 - 0{,}167}{0{,}192} = 13\ \%$

Pour M_{12} : $e = \frac{0{,}115 - 0{,}083}{0{,}115} = 28\ \%$

B) ETUDE D'UNE POUTRE CONTINUE : EFFET DE L'EFFORT TRANCHANT

La poutre continue $A_I\ A_2\ A_3$ est encastrée en A_I et sur appuis simples en A_2 et A_3. Elle est à section constante et les 2 travées sont égales et de longueur l. La travée $A_2\ A_3$ est soumise en son milieu O à une charge P.



I) RESOLUTION -

Les travées étant identiques, posons :

$$A = A_{ij} \qquad B = B_{ij} \qquad t = \frac{B}{A}$$

Les équations intrinsèques (22) permettent d'écrire :

$$M_{2I} = A\,\theta_2.$$

$$M_{23} = m_{23} + A\,\theta_2 + B\,\theta_3 \qquad \left(m_{23} = -\frac{P\,l}{8}\right)$$

L'équilibre des moments au noeud A_2 donne :

$$M_{2I} + M_{23} = m_{23} + 2\,A\,\theta_2 + B\,\theta_3 = 0$$

En combinant cette équation avec l'équation intrinsèque de A_3 :

$$M_{32} = -\,m_{23} + A\,\theta_3 + B\,\theta_2 = 0$$

On déduit :

$$\theta_2 = -\frac{A + B}{2A^2 - B^2}\,m_{23}$$

D'où :

$$M_{2I} = - M_{23} = - \frac{I + t}{2 - t^2} m_{23}$$

Dans l'essai expérimental, on a pris

Charge : P = I.000 kg

Travée : l = 40 cm

Profil : Profil normal en I : 80 x 42 x 3,9

ayant les caractéristiques suivantes :

$I = 77,8$ cm4

$\frac{I}{v} = I9,5$ cm3

$\Omega \# 2,85$ cm2

Considérons les 2 cas suivants :

a) <u>On ne tient pas compte de l'effet de l'effort tranchant</u> :

On a alors :

$t = 0,5$

Le moment d'encastrement parfait m_{23} étant :

$$m_{23} = -\frac{P\,l}{8} = - 5.000 \text{ kg. cm}$$

On déduit :

$$M_{23} = - 4.286 \text{ kg. cm}$$

La réaction R_3 est déterminée par :

$$M_{23} - R_3\, l + 0,5\, P\, l = 0$$

D'où :

$$R_3 = 393 \text{ kg}$$

Le moment de flexion M_o en (O) est :

$$M_o = 0,5\ R_3\ l = 7.860 \text{ kg. cm}$$

b) On tient compte de l'effet de l'effort tranchant :

Par application de la formule (3I), on trouve pour t la valeur :

$$t = 0,33$$

D'où :

$$M_{23} = - 3.500 \text{ kg. cm}$$

$$R_3 = 412,5 \text{ kg}$$

$$M_o = 8.250 \text{ kg. cm}$$

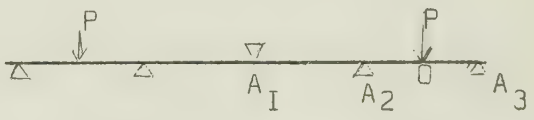
Les erreurs commises en négligeant l'effet de l'effort tranchant dans la travée $A_2\ A_3$ sont donc :

Pour M_{23} : $\frac{4.286 - 3.500}{3.500} = 22,46\ \%$

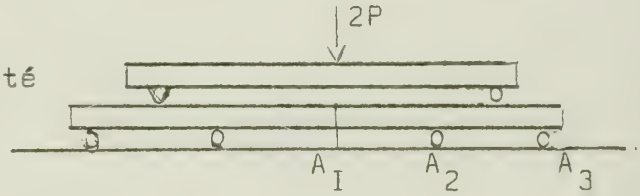
M_o : $\frac{8.250 - 7.860}{8.250} = 4,73\ \%$

II) VERIFICATION EXPERIMENTALE

Un encastrement parfait en A_I étant pratiquement difficile à réaliser, la difficulté a été détournée par utilisation d'une poutre à 4 travées dont les 2 extrêmes sont chargées symétriquement de P.



Le montage a été exécuté de la façon suivante :



Sur le plateau de la presse, qui est de grande rigidité, la poutre repose par l'intermédiaire de 4 rouleaux cylindriques (Ø = 2 cm). L'appui central A_I, devant travailler en sens contraire que les autres appuis, a été obtenu par 2 vis de section convenable solidarisant la poutre au plateau de la presse.
On applique la charge de la presse 2 P par l'intermédiaire d'une poutre secondaire reposant sur la poutre à essayer par un rouleau et un couteau. On a collé 3 extensomètres sur la face supérieure de la poutre en A_2 et 3 autres sur la face inférieure en O. Chaque série de 3 extensomètres posés en alignement suivant l'axe de la poutre, permet d'avoir l'allure du diagramme de flexion respectivement en A_2 et O.

On a appliqué une charge initiale de 2 P = I.000 kg comme zéro de départ. Puis, on a effectué 3 cycles de chargement et de déchargement en donnant à 2 P successivement les valeurs : 2 P = I.000 kg, 2.000 kg,...., 5.000 kg. La valeur moyenne des allongements unitaires e_2 et e_o obtenues expérimentalement pour $\triangle P$ = I.000 kg respectivement en A_2 et A_o sont :

$$e_2 = 8 \times 10^{-6} \qquad e_o = 22 \times 10^{-6}$$

Calculons ces allongements unitaires à partir des valeurs précédentes des moments :

a) <u>On ne tient pas compte de l'effet de l'effort tranchant</u>:

On a :

$$e = \frac{v}{E\ I} M \qquad E = 21.500 \text{ kg/mm2}$$

On trouve pour :

$$M_{23} = 4.286 \text{ kg. cm} \qquad e_2 = 10{,}25 \times 10^{-6}$$

$$M_o = 7.860 \text{ kg. cm} \qquad e_o = 18{,}80 \times 10^{-6}$$

La différence relative avec l'essai est pour :

$$M_{23} : \frac{2{,}25}{8} = 28{,}12\ \%$$

$$M_o : \frac{3{,}20}{22} = 14{,}55\ \%$$

b) <u>On tient compte de l'effet de l'effort tranchant</u> :

On a pour :

$$M_{23} = 3.500 \text{ kg. cm} \qquad e_2 = 8{,}37 \times 10^{-6}$$

$$M_o = 8.250 \text{ kg. cm} \qquad e_o = 19{,}73 \times 10^{-6}$$

La différence relative avec l'expérience est pour :

$$M_{23} : \frac{0{,}37}{8} = 4{,}62\ \%$$

$$M_o : \frac{3{,}2}{22} = 10{,}32\ \%$$

III) <u>CONCLUSIONS</u>

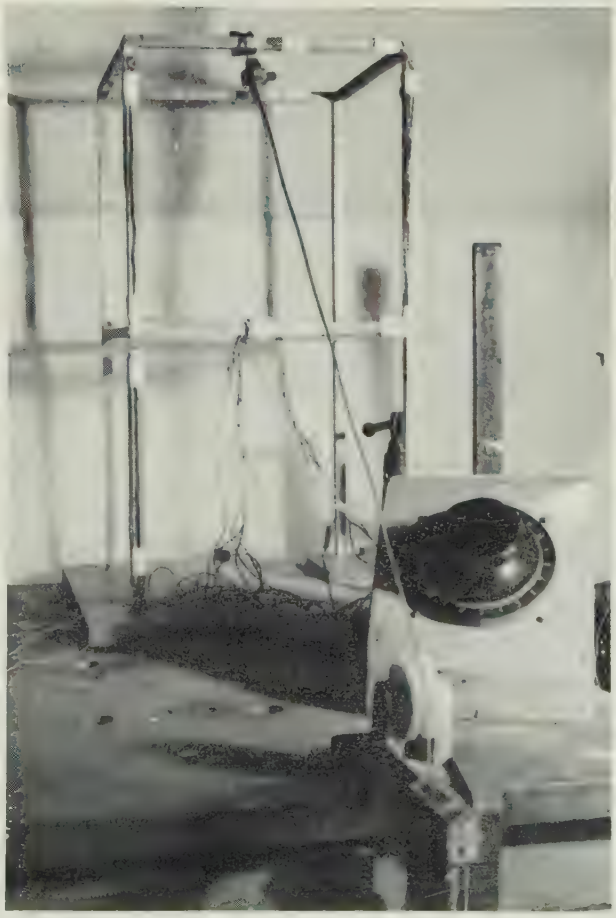
De ce qui précède, on constate que le calcul tenant compte de l'effet de l'effort tranchant $t = 0{,}33$ concorde mieux avec l'essai expérimental que le calcul ordinaire avec $(t = 0{,}5)$.

Il est à remarquer que, dans les cas courants, le rapport $\frac{h}{l}$ de la hauteur d'une poutre à la longueur de la travée varie en général entre les limites :

$$\frac{1}{30} \leqslant \frac{h}{l} \leqslant \frac{1}{5}$$

On a choisi dans l'essai précédent la valeur limite $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ pour mieux mettre en évidence expérimentalement l'effet de l'effort tranchant.

Étude de la poutre continue

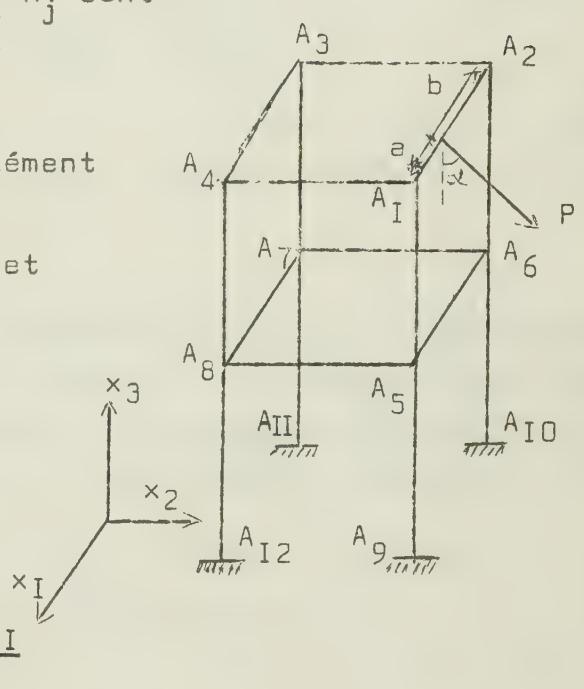


Étude de l'ossature trirectangulaire

C) ETUDE D'UNE OSSATURE DANS L'ESPACE

L'ossature est trirectangulaire à 2 étages. Tous les éléments $A_i\ A_j$ sont identiques de longueur l et de section carrée.

On applique sur l'élément $A_I\ A_2$ une charge concentrée P contenue dans un plan vertical et tel que :



$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{a}{l} = 0{,}4$$

$$\frac{b}{l} = 0{,}6$$

$$P = 1.000 \times \frac{2\,E\,I}{l}$$

I) RESOLUTION

Le nombre (L) d'inconnues du problème est, d'après l'équation (70) :

$$L = 3\,F + D$$

où F : Nombre de noeuds A_i : F = 8

D : Nombre de déplacements indépendants déterminé par l'équation (67) avec :

$$N = 16, \qquad C = 8$$

D'où $D = 2 \times 16 - 3 \times 8 = 8$

et : L = 32 inconnues.

Ces inconnues seront désignées dans la suite par x_{ij} où :

i = I, 2, ... 8 indique le noeud A_i

j = I, 2, 3 indique la composante de la rotation $\overrightarrow{\Omega_i}$ suivant l'axe x_j.

= 4,5 indique le déplacement absolu du noeud A_i suivant respectivement les direction x_I et x_2.

La résolution de ce problème consiste en la détermination de ces 32 inconnues x_{ij}. On applique la méthode décrite dans le chapitre IV qui consiste à établir 32 équations indépendantes entre ces 32 inconnues. Ces équations peuvent être obtenues en exprimant l'équilibre des noeuds A_i :

a) Equilibre des moments : L'équation (7I) :

$$\lesssim_j \overrightarrow{M_{ij}} = 0$$

donne 3 x 8 = 24 équations.

b) Equilibre des forces : L'équation (72) s'écrit :

$$\overrightarrow{R_i} = 0$$

Car, aucune charge n'est appliquée aux noeuds A_i ($\overrightarrow{F_i} = 0$). Cette expression nous donne 8 équations indépendantes.

On a donc 32 équations entre les 32 inconnues x_{ij}. Le tableau annexe donne ces équations écrites dans l'ordre :

- Equilibre des moments : Ce sont les équations de (I) à (24). Ainsi, la Ière équation exprime l'équilibre des moments au noeud A_I suivant la direction (x_I) :

$$\sum_j (M_{ij})_I = (M_{I2})_I + (M_{I4})_I + (M_{I5})_I$$

$$= K (x_{II} - x_{2I}) + Ax_{II} + Bx_{4I} + Ax_{II} + Bx_{5I} -$$

$$(A + B) (x_{I5} - x_{55}) = 0$$

où : K : coefficient de rigidité à la torsion : $K = 0,1406 \cdot \frac{I2GI}{l}$

A : coefficient de rigidité à la flexion $A = \frac{4 E I}{l}$

B : coefficient de répercussion : $B = \frac{2 E I}{l}$

En conséquence, l'équation précédente s'écrit :

$$4,337\, x_{II} - 3x_{I5} - 0,337\, x_{2I} + x_{4I} + x_{5I} + 3x_{55} = 0$$

- Equilibre des forces : Ce sont les équations de (25) à (32).

Ainsi, la 25ème équation exprime l'équilibre des forces au noeud A_I suivant la direction (x_i) :

$$-(M_{5I} + M_{I5})_2 - (M_{26} + M_{62})_2 + (M_{4I} + M_{I4})_3 + (M_{23} + M_{32})_3 = 0$$

En exprimant les moments en fonction des déformations on trouve :

$$-x_{I2} + x_{I3} - 8x_{I4} - x_{22} + x_{23} + x_{33} + 4x_{34} + x_{43}$$

$$- x_{52} + 4x_{54} - x_{62} = 0$$

La résolution de ce système d'équations a été effectuée à la machine 704 I.B.M. qui a donné :

x_{11} = I I3I,62 x_{12} = I I52,64

x_{13} = 546,35 $x_{24} = x_{14}$ = - 283,93

$x_{45} = x_{15}$ = 4 522,84 x_{21} = 924,89

x_{22} = 752,58 x_{23} = - I 429,34

$x_{35} = x_{25}$ = 3 8I5,50 x_{3I} = 924,89

x_{32} = - 50,38 x_{33} = - 283,77

$x_{44} = x_{34}$ = I85,2I x_{4I} = I I3I,62

x_{42} = - 29,28 x_{43} = - 875,93

x_{5I} = I 70I,7I x_{52} = - 90,00

x_{53} = - I88,I8 $x_{64} = x_{54}$ = - 98,I2

$x_{85} = x_{55}$ = I 952,83 x_{6I} = I 44I,86

x_{62} = 267,02 x_{63} = - 209,35

$x_{75} = x_{65}$ = I 702,2I x_{7I} = I 44I,86

x_{72} = - 66,79 x_{73} = - I94,I7

$x_{84} = x_{74}$ = 88,8I x_{8I} = I 70I,7I

x_{82} = - 73,00 x_{83} = - 205,36

II - VERIFICATION EXPERIMENTALE :

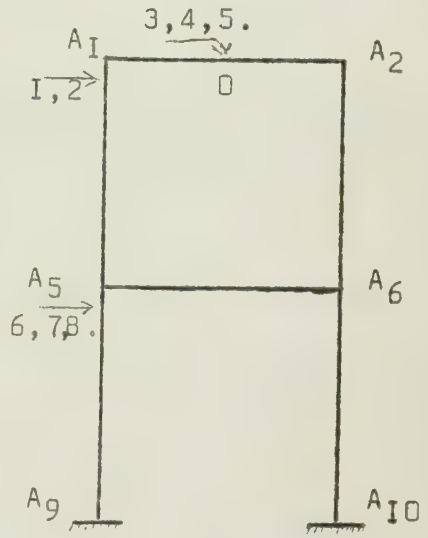
On a effectué l'essai sur une ossature ayant les caractéristiques suivantes :

l = 25 cm section = I x I cm2

a = I0 cm P = 50 kg

b = I5 cm

Dans une plaque métallique : 35 x 35 x 2 cm3 on a percé 4 trous dans lesquels on a encastré les extrémités A_9, A_{10}, A_{11} et A_{12} par soudure.



Le principe de l'essai consiste en ceci :

En un point d'une face d'une barre quelconque, l'allongement unitaire (e) est égal à :

$$e = e_N + e_M$$

où : e_N : allongement unitaire dû à l'effort normal N :

$$e_N = \frac{1}{E} \frac{N}{S}$$

e_M : allongement unitaire dû au moment de flexion M :

$$e_M = \pm \frac{M}{E\ I\ /\ v}$$

Les barres étant identiques, on a donc partout :

$$\left| \frac{M}{e_M} \right| = \frac{E\ I}{v} = Cte$$

On a collé 8 extensomètres aux endroits indiqués sur la figure groupés par 2 ou 3 extensomètres dont chacun est sur une face différente de la barre. En principe, 2 extensomètres situés sur 2 faces opposées d'une barre suffisent à déterminer e_N et e_M. On a constitué les rapports pour les différents extensomètres :

$$f = \frac{M'}{e'_M}$$

où : M' : moment calculé par les équations intrinsèques (22) à partir des déformations x_{ij} précédemment déterminées. Il est évident que M' est proportionnel au moment réel M.

e'_M : Mesure obtenue par lecture directe du pont extensomètrique. Elle représente à un coefficient constant près l'allongement unitaire réel $e_{M'}$

Le rapport ρ doit être donc constant pour les différents extensomètres.

Les valeurs de ρ trouvées sont :

Extensomètres I et 2 : ρ = 5,2
3 et 4 : = 5,I
6 et 8 : = 4,82
7 : = 5,2

Aux erreurs de mesure près, la concordance entre le calcul et l'essai est donc assez satisfaisante.

(N.B. : L'extensomètre 5 n'a pas fonctionné).

=======

Bibliographie

BAES : Cours de résistance des matériaux (Université de Bruxelles).

Bertrand de FONTVIOLANT:

- Résistance des matériaux (Baillière).
- Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. (Gauthier-Villiars).

CASADO : Calcul des grandes ossatures réticulaires à noeuds rigides (Dunod).

CHARON : La méthode de Cross (Eyrolles).

COURBON : Cours de résistance des matériaux (Dunod).

KAMMERER : Cours de résistance des matériaux (Ecole Centrale)

L'HERMITE : Résistance des matériaux théorique et expérimentale (Dunod).

MAGUEL : Stabilité des constructions (Fecheyr - Belgique)

PIGEAUD : Résistance des matériaux et élasticité (Gauthier-Villiars)

SIESTRUNCK et ALAIS :

- Comptes rendus de l'Académie des Sciences : Tome 252, Année 1961, page 1104.

TIMOSHENKO : -Résistance des matériaux (Béranger)
-Théorie de la stabilité élastique (Béranger)

TABLE DES MATIERES

Introduction I

Notations 2

Conventions 3

CHAPITRE I : Principes Fondamentaux

A) Hypothèses de base 4

B) Théorèmes de base: Théorèmes de Castigliano et de Fontviolant généralisés 4

CHAPITRE II: Etude des éléments droits

A) Considérations préalables 7

B) Etude de l'élément $A_i\ A_j$ suivant (x_1) 7

C) Etude suivant (x_2) ou (x_3) 8

I) Détermination de la déformation (y) 8

II) Etude de l'équilibre de l'élément $A_i\ A_j$ I2

- Ier Etat I2

- 2ème Etat : I2

a) Coefficient de transmission t_{ji} I4

b) Coefficient de rigidité A_{ji} I5

c) Coefficient de répercussion B_{ij} I7

- 3ème Etat I7

- Remarques I8

III) Effet d'un déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta_{ij}}$ des 2 extrémités I8

IV) Equations intrinsèques I9

V) Cas particuliers I9

a) Section quelconque : I9

I) On néglige l'effet de l'effort normal N I9

2) On néglige l'effet de l'effort tranchant T I9

b) Section constante : 20

I) N agit en compression 20

2) N agit en traction 22

3) L'effet de l'effort normal est négligeable 23

4) Les effets des efforts normal et tranchant sont négligeables 24

D) Application : Déviation du vecteur moment 25

Application numérique 26

CHAPITRE III : Etude des éléments courbes

A) Considérations préalables 28

B) Etude d'un couple suivant (z) 28

I) Résolution du problème 28

II) Coefficient de rigidité A_{ij} 30

III) Coefficient de transmission t_{ij} 30

IV) Coefficient de répercussion B_{ij} 30

V) Remarques 31

C) Etude d'un couple contenu dans le plan (xy) 32

I) Résolution du problème 32

a) Valeur de $(\theta_i)_x$ 34

b) Valeur de $(\theta_i)_y$ 34

c) Expressions de c_x et c_y 35

d) Etude du noeud A_j 35

e) Remarques 36

II) Relations entre les différents coefficients de A_i et A_j 37

D) Etude du déplacement relatif $\overrightarrow{\Delta_{ij}}$ des extrémités 40

a) Déplacement Δ_x 40

b) Déplacement Δ_y 42

c) Déplacement Δ_z 42

E) Equations intrinsèques 43

CHAPITRE IV : Etude des systèmes

A) Considérations préalables 45

B) Déplacement des noeuds 45

C) Degré de liberté de déplacement 46
D) Résolution des systèmes 49
E) Résolution d'un système plan 50
I) Première méthode : Calcul des déformations 50
II) Deuxième méthode : Méthode de Cross simplifiée 5I
F) Résolution d'un système dans l'espace 5I
I) Equation générale 5I
II) Méthode de résolution 55
G) Systèmes particuliers 57
I) Systèmes symétriques 57
II) Systèmes constitués de cellules identiques 58
H) Remarques générales 59

CHAPITRE V : Analogie électrique

A) Considérations préalables 60
B) Théorème des 3 moments 60
I) Equation générale 60
II) Analogie électrique 62
III) Cas particulier 64
C) Etude des systèmes plans à noeuds fixes 64
I) Equation générale 64
II) Analogie électrique 65
D) Condition d'applicabilité de l'analogie électrique 66

CHAPITRE VI : Applications diverses

A) Etude d'un portique 68
B) Etude d'une poutre continue 7I
C) Etude d'une ossature dans l'espace 76

Bibliographie 82

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE
DANS UN CORPS DE RÉVOLUTION"

Vu et approuvé :
Paris, le 19 Avril 1961
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Joseph PERES

Vu et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean SARRAILH